ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Ерқара Жолдыбайұлы Айдос

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА-2

Өңделіп, толықтырылып алтыншы басылуы

Алматы, 2015

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
А 31

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі оқулық ретінде ұсынған

***Пікір жазғандар**:*

Ж.Тоқыбетов – ҚазМУ «Математикалық анализ» кафедрасы, ф.-м.ғ.к., профессор;
А.Сақабеков – ҚБТУ математика кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., профессор;
С. Мухамбетжанов – Қазақ Ұлттық университеті, ф.-м.ғ.д., проф;
Ә.Н.Төреқожаев – Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ «Қолданбалы механика және Машиналар құрылымдарының негіздері» кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰИА және Нью-Йорк Академиясының академигі

Айдос Е.Ж.
А 31 **Жоғары математика-2**: Оқулық. 3-кітапта. / Е.Ж.Айдос – Алматы: Бастау, 2015. 2-кітап. – 520 б.

ISBN 978-601-281-136-0 (к.2)
ISBN 978-601-281-138-4

Алдыңыздағы кітап – жоғары математика пәні бойынша техникалық жоғары оқу орындарының бакалавриат деңгейіндегі типтік оқу бағдарламасына сәйкес оқытудың кредиттік жүйесіне арналып жазылған, үш бөлімнен тұратын кітаптарымыздың **екіншісі.** Мұнда жоғары математиканың «Математикалық анализге кіріспе; Бір айнымалды функциялардың дифференциалдық және интегралдық есептеулері» атты бөлімдері қарастырылған. Кітап келесі құрылымда жазылған: 1) теориялық курсқа арналған сұрақтар мен жаттығулар; 2) лекциялық курс; 3) студенттердің өздік жұмысына арналған үй тапсырмалары (ҮТ); 4) ҮТ орындау үлгілері; 5) бақылау жұмысына арналған есептер

Жоғары техникалық оқу орындарының студенттері мен оқытушыларына арналған.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-601-281-136-0 (к.2)
ISBN 978-601-281-138-4

Алғы сөз

Техникалық жоғары оқу орындарының бакалавриат деңгейіндегі оқу бағдарламаларына сәйкес жазылған, үш бөлімнен тұратын оқулықтарымыздың екінші бөлімінде математикалық анализге кіріспе, бір айнымалды функциялардың дифференциалдық және интегралдық есептеулері кірген. Біз орыс тіліндегі оқулықтар мен оқу құралдарының материалдарын сұрыптап талдап, сын көзбен қарай отырып, олардағы кейбір теориялық мәселелерге өзіміздің көзқарасымызға сай өзгерістер енгізе отырып пайдаландық. Мысалы, көптеген оқулықтар мен оқу құралдарында орта мән туралы теоремалар тек дифференциалданатын функциялар үшін ғана тұжырымдалатыны белгілі. Ал біз функцияның шегі мен туындысының мәндерін кеңейтілген $[-\infty;\ +\infty]$ нүктелер жиынында қарастыратындықтан, кітабымызда аталған теоремалар дифференциалданатын және ақырсыз туындылары бар функциялар үшін тұжырымдалған. Бұл, орта мән туралы теоремаларды қолданатын теория мен практиканың ауқымдарын (диапазондарын) кеңейте түседі.

Функцияның үзілісіздігі туралы да осындай жағдай бар. Функцияның үзіліссіздігінің белгілі анықтамасы келесі түрде тұжырымдалады: *Егер* x_0 *нүктесінде және оның қандай да бір маңайында анықталған* f *функциясының осы нүктеде шегі бар және* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *теңдігі орындалса, онда* f *функциясы* x_0 *нүктесінде үзіліссіз деп аталады.* Мұнда $f(x_0) \in (-\infty;\ +\infty)$ болатыны белгілі. Бұл анықтаманы қолданатын математикалық тұжырымдар кейде теориялық қателерге душар болатынын келесі мысалдар ккрсетеді. Мысалы, үзіліссіздіктің осы анықтамасы негіз болатын келесі тұжырымды алайық.

Егер Γ қисығы $x = x(t),\quad y = y(t),\ \ t \in [a,b],$ параметрлік теңдеулермен беріліп, $x(t),\ y(t)$ үзіліссіз функцияларының $[a,b]$

кесіндісінде бір мезгілде нөлге тең емес үзіліссіз туындылары бар болса, онда Γ осы кесіндіде тегіс қисық деп аталады

Бұл анықтаманы мына қисықтарға қолданып көрейік: $\Gamma_1: \ x=\sqrt{1-t^2}, \quad y=t, \ -1\le t\le 1$ - жарты шеңбер және $\Gamma_2: \ y=\sqrt[3]{t}, \ x=t, -\infty<t<+\infty$ - кубтық парабола. Мұнда $x=\sqrt{1-t^2}$ функциясының туындысы үшін $t=\pm 1,$ ал $y=\sqrt[3]{t}$ функциясының туындысы үшін $t=0$ - үзіліс нүктелер болатындықтан, Γ_1 - жарты шеңбер $[-1;\ 1]$ кесіндісінде, ал Γ_2 - кубтық парабола $t=0$ нүктесін қамтитын кесіндіде тегіс емес! Дұрыс емес тұжырымға келдік. Көрсетілген мәселенің шешімін табу үшін, біз функцияның үзіліссіздігінің анықтамасын модификацияладық, дәлірек айтқанда, бұл анықтамадағы функция мен оның туындысының мәндерін кеңейтілген $[-\infty;\ +\infty]$ нүктелер жиынында қарастыра отырып тұжырымдадық. Бұл айтылғандарды оқушы кітабымыздың қосымша материалдарынан оқи алады.

Кітап, оқытудың бұрынғы традициялық әдісі мен кредиттік технологиялық оқыту әдісін ұштастыра отырып жазылған. Теоремалардың көпшілігі дәлелденген. Керек жағдайларда теоремадағы шарттардың қажеттігі және басқа да маңызды мәселелер қарсы мысалдар (контрпримеры) арқылы ашылады. Қазіргі бағдарламаларда талап етілмесе де математикалық мән-мағынасы терең сұрақтарды да оқушы назарынан тыс қалдырмауға тырыстық. Мысалы, Риман интегралын есептеуге қолданылатын Ньютон-Лейбниц формуласы, бағдарламаға сәйкес, тек үзіліссіз функциялар үшін ғана берілуі тиіс болғанымен, біз материалды тереңірек оқып үйренгісі келген оқушыға арнап Ньютон-Лейбниц формуласын қолданудың жалпы жағдайларына байланысты материалдарды да (анализдің негізгі теоремасы және т.б.) қостық.

Оқушы мен оқытушының қолдануына ыңғайлы болуы үшін, лекциялық курсты, практикалық есептерді, студенттердің өз бетінше орындауына арналған тапсырмаларды, аралық бақылауға арналған сұрақтарды бір оқулық ішінде қатар беруді жөн көрдік. Әрбір тарауда теориялық материал (лекция), осы материалға арналған сұрақтар мен тапсырмалар, 30 варианттан тұратын үй тапсырмалары (ҮТ), жеке үй тапсырмаларын орындау үлгілері беріледі. Сонымен қатар оқырмандардың ұсынысын ескеріп, кітабымыздың осы, алтыншы басылымына бақылау жұмысына арналған есептерді де қостық. Кітабымыздың теориялық бөлімі 2003ж. ҚР ОҒМ оқулық ретінде ұсынған «Е.Ж.Айдос Жоғары математика (қысқаша курс)» атты оқулықтың материалдарынан алынған. Ал студенттердің үй тапсырмалары үшін, А.П.Рябушко және т.б. авторлардың «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике» атты үш бөлімнен тұратын оқу құралдарындағы материалдарын бізге қажетті басқа тақырыптарға арналған есептермен толықтырып, оларды орындау үлгілеріне кейбір әдістемелік өгерістер енгізе отырып пайдаландық. Сонымен бірге материалдың математикалық қатаңдығын сақтай отырып, оны оқушыға түсінікті, жеңіл тілмен жеткізуге тырыстық.

Әрбір тарау параграфтарға бөлінген. Кейбір параграфтар пункттерге бөлінеді. Теорема дәлелдеуінің немесе мысалдарды шығарудың басталуы мен аяқталуын сәйкес ▼ жәңе ▲ белгі-лерімен көрсетіп отырамыз. Үй тапсырмаларындағы нөмірлердің бірінші цифры тарауға сәйкес, ал екінші цифры осы тарауға арналған тапсырма нөмірін көрсетеді, мысалы 5.2 – ҮТ белгілеуі, бесінші тарау бойынша студенттерге берілетін екінші тапсырманы көрсетеді (әрбір тапсырмада бірнеше есеп болуы мүмкін).

Қазіргі кезде қазақша математикалық терминдер толық қалыптасып болмағандықтан, кітабымызда оқушының көңілінен шықпай жатқан терминдер бар болса, оларды бірігіп талқылауға дайынбыз. Біз қолданған математикалық терминдер 1999 ж. жарық көрген [11] сөздіктен алынды.

Автор

4. МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗГЕ КІРІСПЕ

§ 4.1. Жиындар мен математикалық логика элементтері. Аралықтар

4.1.1. Математика пәні. Тұрақты және айнымал шамалар.

Ғылымдар ішінде математика ерекше орын алады. Математика – нақты өмірдің сандық қатыстары мен кеңістіктегі түрлері туралы ғылым.

Математика басқа ғылымдарға табиғат құбылыстары арасындағы түрлі қатыстарды өрнектеу үшін, сандар мен символдар тілін ұсынады. Бірақ математиканы қолданбас бұрын биолог, физик немесе экономист зерттелетін құбылыс мәнін терең түсінуі қажет, оны математикалық түрде өңдеуге болатындай етіп бөліктеуі керек.

Математикадағы зерттеу объектілері – қоғам мен табиғат құбылыстарын сипаттау үшін құрылған логикалық модельдер. Математика осы модельдер элементтерінің арасындағы қатыстарды зерттейді.

Бір ғана математикалық модель өзінің абстракциялылығынан әртүрлі процестерді сипаттай алады. Мысалы, бір дифференциалдық теңдеу радиоактивті ыдырауды да, дене температурасының өзгерісін де сипаттайды.

Табиғат құбылыстарын зерттеуде біз бір шаманың екінші шамаға тәуелділігін, шамалардың өзгеріп отыратындығын көреміз. Сондықтан айнымал шама математикалық анализ курсында негізгі түсінік болып табылады.

Айнымал шама деп, ең болмағанда өзара тең емес екі мәнге ие болатын шаманы қабылдаймыз. Шама тек бір ғана мән қабылдаса, ол тұрақты деп аталады. Айнымал шаманың қабылдайтын барлық мәндерін біріктірсек, осы шаманың мәндер жиынын аламыз.

4.1.2. Жиындар және оларға қолданылатын кейбір амалдар.

Жиын – қандай да бір объектілердің (заттардың) жиынтығы. Жиынға кіретін объектілерді **жиынның элементтері** деп атаймыз. Жиынды үлкен латын әріптермен: $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, ал оның элементтерін кіші латын әріптерімен: $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ белгілейді.

$a \in A$ жазуы, a элементінің A жиынында жататынын (тиісті екенін), ал $a \notin A$ (немесе $a \,\overline{\in}\, A$) белгілеуі, a элементінің A жиынында жатпайтынын көрсетеді. Бірде-бір элементі жоқ жиын **бос жиын** деп аталады да $\varnothing$ арқылы белгіленеді.

$A \subset B$ жазуы, A жиынының әрбір элементі B жиынының да элементі, яғни B жиынында жатпайтын A жиынының бірде бір элементі жоқ екенін білдіреді ($\subset$ – енгізу белгісі). Бұл жағдайда A жиыны B жиынының **ішжиыны** деп аталады. Бос жиын – кез келген жиынның ішжиыны, өйткені жиында жатпайтын $\varnothing$ жиынының бір де бір элементі жоқ.

Егер $A \subset B$ және $B \subset A$ болса, онда ***A* мен *B* тең жиындар** $(A = B)$ деп аталады. Немесе, бірдей элементтерден құралған жиындарды тең деп атайды.

Жиындарды өрнек түрінде жазу үшін ***фигуралық жақша*** қолданылады. Мысалы: а) $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ жазуы, жиынның элементтері $a_1, a_2, ..., a_n$ және олардың саны n тең екенін көрсетеді.

Бұл жағдайда жиынның элементтерінің саны ақырлы, *n-ге* тең болғандықтан, A – **ақырлы жиын** деп аталады. Ақырлы емес жиындар, яғни **ақырсыз жиындар** бар. Олар *саналымды* (мысалы, бүтін сандар жиыны – саналымды ақырсыз жиын), немесе *саналымсыз* (мысалы, 0 мен 1 арасындағы нақты сандар жиынысаналымсыз ақырсыз жиын) болуы мүмкін;

б) A жиыны **негізгі *U* жиынының** қандай да бір α қасиетке ие болатын (немесе α шартын қанағаттандыратын) элементтерінен құралған ішжиын ретінде берілуі мүмкін. Бұл жағдайда оны келесі математикалық өрнек арқылы жазады $A = \{x \in U : \alpha(x)\}$ және ол, «A жиыны – U жиынының α қасиетке ие болатын элементтерінің жиыны» деп оқылады. Мысалы, $A = \left\{x \in N : \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right) = 0\right\}$ – берілген теңдеудің барлық ***натурал түбірлерінің*** жиыны, яғни $A = \{1, 2\}$.

Мысалдар. 1). Егер $A = \{1, 2, 3\}$ болса, онда бұл жиынның үш элементі $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$ және сегіз ішжиыны бар: $\{1\} \subset A$, $\{2\} \subset A$, $\{3\} \subset A$, $\{1,2\} \subset A$, $\{1,3\} \subset A$, $\{2,3\} \subset A$, $\{1,2,3\} \subset A$, $\varnothing \subset A$.

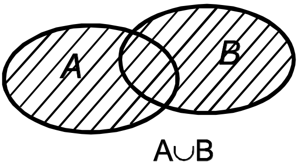
2) $A=\{1,2,3\}$ және $B=\{2;3;1\}$ жиындары тең. Өйткені $A\subset B$ және $B\subset A$ енгізулері орындалатынын көру қиын емес. Екі жиынның екеуі де тек 1, 2, 3 элементтерінен құралған.

Жиындарға жасалатын кейбір амалдарды қарастырайық.

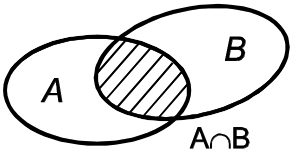
A мен ***B*** жиындарының **бірігуі** деп, *A* және *B* жиындарының ***ең болмағанда*** біреуіне тиісті элементтерден ғана құралған *C* жиынын айтады және оны $C=A\cup B$ (кейде $C=A+B$) арқылы белгілейді: $C=A\cup B\overset{def}{=}\{x: x\in A \;\; \textit{немесе} \;\; x\in B\}$ (1-сурет).

A мен ***B*** жиындарының **қиылысуы** деп, *A* жиынында да, *B* жиынында да жататын (яғни *A* және *B* жиындарына ортақ) элементтерден құралған *C* жиынын айтады және оны $C=A\cap B$ (кейде $C=A\cdot B$) арқылы белгілейді: $C=A\cap B=\{x:\; x\in A \quad \textit{және} \quad x\in B\}$ (2-сурет).

Мысал. $A=\{-1,2,5,7\}$ және $B=\{-1,0,5,6,7\}$ жиындары берілсе, онда $A\cup B=\{-1,0,5,6,7,2\}$, $A\cap B=\{-1,5,7\}$.



1-сурет



2-сурет

Бірігу және қиылысу амалдарының кейбір қасиеттерін жазып көрсетейік.

1) Коммутативтік: $A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$

2) Ассоциативтік:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

3) Дистрибутивтік:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

4) Идемпотенттік: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

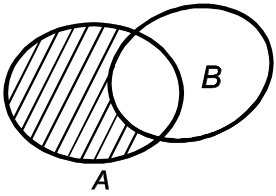
Сонымен бірге $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$ теңдіктерінің де орындалатынын көру қиын емес.

Егер $A \cap B = \varnothing$ болса, онда A және B қиылыспайтын жиындар болады.

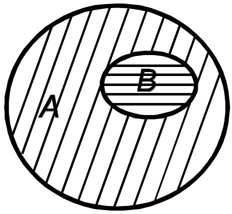
A мен ***B*** жиындарының **айырымы** деп, A жиынының B жиынына тиісті емес барлық элементтерінен құралған C жиынын айтады және оны $A \setminus B$ немесе A-B арқылы белгілейді:

$$C = A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Жалпы жағдайда, $(A \setminus B) \cup B \neq A$ теңсіздігі дұрыс (3-сурет), бірақ $B \subset A$ болса, онда $(A \setminus B) \cup B = A$ (4-сурет).



3-сурет



4-сурет

Мысал. $A = \{-1, 2, 5, 7\}$, $B = \{-1, 0, 5, 6, 7\}$ жиындары берілсе, $C = A \setminus B = \{2\}$.

Егер $A \subset B$ болса, онда $B \setminus A$ айырымы A жиынының B жиынына дейінгі **толықтауышы** деп аталады да, $\overline{A}_B$ (немесе A'_B, немесе $C_B A$) арқылы белгіленеді. Ал тек қана белгілі бір негізгі U жиынының ішжиындары қарастырылатын жағдайда A жиынының U жиынына дейінгі толықтауышы **А жиынының толықтауышы** деп аталады да, $\overline{A}$ (немесе A' немесе CA) арқылы белгіленеді.

Бұл анықтамадан $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$ теңдіктері шығады.

Келесі теңдіктер **қосарлас заңдар** немесе **де Морган заңдары** деп аталады:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \tag{1}$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}. \tag{2}$$

Мысал. (2) теңдікті дәлелдеу керек:

▼ $x\in\overline{A\cap B}$ болсын. Онда $x\notin A\cap B$ болады да, $x\notin A$ немесе $x\notin B$, яғни $x\in\overline{A}$ немесе $x\in\overline{B}$. Ал бұл $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$ деген сөз. Олай болса, келесі енгізу орындалады:

$$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}. \tag{3}$$

Енді $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$ болсын, онда $x\in\overline{A}$ немесе $x\in\overline{B}$ болады да, $x\notin A$ немесе $x\notin B$, яғни $x\notin A\cap B$ аламыз, ал бұл $x\in\overline{A\cap B}$ деген сөз. Сонымен

$$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cap B} \tag{4}$$

енгізуін алдық. (3) пен (4) енгізулерінен анықтама бойынша

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

шығады. ▲

Жаттығу ретінде оқушыға (1) теңдікті дәлелдеуді ұсынамыз.

Элементтері сандар болатын жиынды **сандар жиыны** деп атайды.

Негізгі сандар жиындарын атап өтейік.

Натурал сандар жиыны N арқылы белгіленеді: $N=\{1,2,3,\ldots\}$.

Натурал сандар жиынында қосу және көбейту амалдарын орындауға болады.

Бүтін сандар жиыны Z арқылы белгіленеді:

$$Z=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}.$$

Бүтін сандар жиынында қосу, азайту және көбейту амалдарын орындауға болады.

Рационал сандар жиыны Q арқылы белгіленеді:

$$Q=\left\{\frac{p}{q}: p\in Z, q\in N\right\}.$$

Рационал сандар жиынында барлық төрт арифметикалық амалдарды (нөлге бөлуден басқа) орындауға болады.

Периодты емес ақырсыз ондық бөлшекті **иррационал сан** деп атайтыны мектеп курсынан белгілі.

Рационал сандар жиыны мен иррационал сандар жиынының бірігуі **нақты сандар** жиынын құрайды және оны R арқылы белгілейді. Нақты сандар жиынында барлық арифметикалық амалдарды орындауға (бөлу үшін, бөлгіш нөл емес), теріс емес сандардың кез келген рационал дәрежелі түбірін табуға болады.

Аталған жиындар үшін келесі енгізулер орындалады:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

4.1.3. Кейбір математикалық логика символдары.

Математикалық сөйлемдерді, үнемділік және ыңғайлылық үшін, логикалық символдарды қолданып жазады. Біз тек жиі қолданылатын ең қарапайым логикалық символдарды ғана келтіреміз.

$\alpha, \beta, \ldots$ қандай да бір айтылымдар (пікірлер), яғни, әрқайсысы туралы «шын» немесе «жалған» деп айтуға болатын хабарлы сөйлемдер болсын. Басқаша айтқанда, α пікірі келесі екі мәннің бірін ғана қабылдайды: «**шын**» немесе «**жалған**». Кейде «шын» – 1, ал «жалған» – 0 арқылы белгіленеді. Күрделі айтылымдар құрау үшін көбінесе келесі бес логикалық символ пайдаланылады: $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

1) $\rceil\alpha$ немесе $\bar{\alpha}$ жазуы, «α пікірі теріс (орындалмайды)» дегенді білдіреді, ($\rceil$ – терістеу символы). Мұнда: $\alpha = 1$ болса $\bar{\alpha} = 0$, ал $\alpha = 0$ болса $\bar{\alpha} = 1$.

2) $\alpha \wedge \beta$ жазуы: «α және β» дегенді білдіреді ($\wedge$ – ***конъюнкция*** символы). Мұнда: $\alpha = 1$, $\beta = 1$ болса $\alpha \wedge \beta = 1$, ал α мен β-ның басқа мәндерінде $\alpha \wedge \beta = 0$.

3) $\alpha \vee \beta$ жазуы: «α немесе β» дегенді білдіреді ($\vee$ – ***дизъюнкция*** (ажырастық, бытыраңқылық) символы). Мұнда: $\alpha = 0$, $\beta = 0$ болса $\alpha \vee \beta = 0$, ал α мен β-ның басқа мәндерінде $\alpha \vee \beta = 1$.

4) $\alpha \Rightarrow \beta$ жазуы: «α айтылымынан β айтылымы шығады», немесе қысқаша «α-дан β шығады» дегенді білдіреді. ($\Rightarrow$ – ***импликация*** символы. Мұнда: $\alpha = 1,\ \beta = 0$ болса $\alpha \Rightarrow \beta\ = 0,$ ал α мен β-ның басқа мәндерінде $\alpha \Rightarrow \beta\ = 1.$

5) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ жазуы: «α айтылымы β айтылымына парапар (эквиваленттi)», басқаша айтқанда, $\alpha \Rightarrow \beta$ және $\beta \Rightarrow \alpha$ импликацияларының екеуі де орындалады дегенді білдіреді ($\Leftrightarrow$ – парапар символы). Мұнда: $\alpha = 1,\ \beta = 1$ немесе $\alpha = 0,\ \beta = 0$ болса $\alpha \Leftrightarrow \beta\ = 1,$ ал α мен β-ның басқа мәндерінде $\alpha \Leftrightarrow \beta\ = 0.$

$\forall x \in A: \alpha(x)$ жазуы: «A жиынының кез келген x элементі үшін α қасиеті орындалады» дегенді білдіреді ($\forall$ – **жалпылық** кванторы). $\forall$ кванторы ауызша тұжырымдарда: «барлық», «кез келген», «әрбір» деген сөздерді ауыстырады. $\forall$ белгісі ағылшынның «*Any* – барлық» деген сөзінің бірінші әріпінің төңкеріліп жазылуы.

$\exists x \in A: \alpha(x)$ жазуы: «A жиынында α қасиеті орындалатындай x элементі табылады (бар) дегенді білдіреді ($\exists$ – **бар болу** кванторы). $\exists$ кванторы: «бар», «табылады» деген сөздер орнына қолданылады. $\exists$ белгісі ағылшынның «Existence – бар» деген сөзінің бірінші әрпінің теріс аударылып жазылуы.

Мысалы, «кез келген $x \in R$ саны үшін $x + y = 3$ теңдігі орындалатын $y \in R$ саны табылады» деген сөйлемді логикалық символдар арқылы $\forall x \in R,\ \exists y \in R:\ x + y = 3$ деп жазуға болады.

Егер $\alpha(x)$ қасиеті орындалатындай $x \in A$ элементі бар және ол жалғыз болса, онда $\exists\, !x \in A : \alpha\ (x)$ деп жазады.

Теорема туралы. Егер теорема $1)\,\alpha \Rightarrow \beta$ импликациясы түрінде тұжырымдалса, онда α – теорема **шарты**, ал β – теореманың **қорытындысы** деп аталады.

Осы $1)\,\alpha \Rightarrow \beta$ теоремасына қатысты үш теорема құрастыруға болады: $2)\,\beta \Rightarrow \alpha$ - кері теорема; 3) $\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}$ – қарама-қарсы теорема; 4) $\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}$ - кері теоремаға қарама-қарсы теорема.

Теоремаларды дәлелдеуде жиі қолданылатын әдіс – «қарсы жору» әдісі. Оның негізінде келесі ***контрапозиция*** деп аталатын заң жатыр: $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$ немесе $(\beta \Rightarrow \alpha) \Leftrightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta})$.

Ал $\alpha \Rightarrow \beta$ теоремасы орындалғанмен оған кері $\beta \Rightarrow \alpha$ теорема (ендеше қарама қарсы $\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}$ теорема да) орындалмауы мүмкін. Егер $\alpha \Rightarrow \beta$ және $\beta \Rightarrow \alpha$ өзара кері теоремалары орындалса, онда ол екеуін біріктіріп, **критерий** деп аталатын $\alpha \Leftrightarrow \beta$ түріндегі теорема алуға болады. Бұл жағдайда α-ның орындалуы үшін β-ның орындалуы **қажетті** және **жеткілікті** болады. Мұндай теореманы **анықтама** ретінде де қолданады, өйткені α бойынша β (немесе β бойынша α) анықталады.

Мысал.

1) *Егер төртбұрыш-ромб болса, онда бұл төртбұрыштың диогоналдары өзара перпендикуляр*.

Бұл $\alpha \Rightarrow \beta$ түріндегі теоремада: α – «төртбұрыш – ромб», β – «бұл төртбұрыштың диогоналдары өзара перпендикуляр». Ал оған кері $\beta \Rightarrow \alpha$ түріндегі теорема: «*Егер төртбұрыштың диогоналдары өзара перпендикуляр болса, онда ол – ромб*», әрине орындалмайды. Бірақ контрапозиция заңына сүйеніп оған пара пар $\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}$ түріндегі теореманы ала аламыз: «*Егер төртбұрыштың диогоналдары өзара перпендикуляр болмаса, онда ол ромб емес*».

2) *Егер санның соңғы цифры екіге бөлінсе, онда ол жұп сан.*

Бұл $\alpha \Rightarrow \beta$ түріндегі теоремаға кері $\beta \Rightarrow \alpha$ түріндегі келесі теорема да орындалады: «*Егер сан жұп болса, онда оның соңғы цифры екіге бөлінеді*». Ендеше, осы $\alpha \Rightarrow \beta$ және $\beta \Rightarrow \alpha$ түріндегі екі теореманы біріктіріп $\alpha \Leftrightarrow \beta$ түрінде, келесі критерийді жаза аламыз: «*Сан жұп болуы үшін, оның соңғы цифры екіге бөлінуі қажетті және жеткілікті*».

4.1.4. Кесінді, интервал (аралық), шенелген жиын.

R нақты сандар жиынының ішжиындары үшін келесі белгілеулер жиі қолданылады: $[a,b] \equiv \{x \in R : a \le x \le b\}$, яғни $a \le x \le b$ қос теңсіздігін қанағаттандыратын нақты сандар жиыны **кесінді** немесе

сегмент деп аталады да $[a,b]$ арқылы белгіленеді. Дербес жағдайда, $[-a,\ a]$кесіндісін, яғни $\{x \in R : -a \le x \le a\}$ жиынын $\{x \in R :\ |x| \le a\}$ арқылы да белгілейді. Бұл – координаттың бас нүктесінен қашықтығы a дан аспайтын нақты сандар жиыны ($|x| \equiv |x-0|$ координаттың бас нүктесінен x нүктеге дейінгі қашықтықты көрсетеді).

Осы сияқты, $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$ – **интервал (аралық),** ал $[a,b) = \{x \in R : a \le x < b\}$ немесе $(a,b] = \{x \in R : a < x \le b\}$ – **жартылай интервал (аралық)** деп аталады.

Кесінді, интервал және жартылай интервалдар – **интервалдар (аралықтар)** деп аталады.

Көп жағдайда R нақты сандар жиынын «плюс ақырсыздық» және «минус ақырсыздық» деп аталатын, сәйкес $+\infty$ және $-\infty$ символдарымен толықтырып алып қолданған пайдалы. Бұл екі ақырсыздық үшін келесі қатыстар орындалады (§ 4.4 қараңыз):

$+\infty = +\infty;\quad -\infty = -\infty;\quad -\infty < +\infty;\quad \forall a \in R:\ -\infty < a < +\infty$ – ***реттік қатыстар***;

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty; \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty;$$

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty; \quad (+\infty)\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty;$$

$$\forall a \in R:\ \ a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty,\ \ -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty;$$

$$\forall a > 0:\ \ a\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot a = +\infty, \qquad a\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot a = -\infty;$$

$$\forall a < 0:\ \ a\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot a = -\infty, \qquad a\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot a = +\infty;$$

Бұл екі ақырсыздықты $a \in R$ ***нақты (ақырлы) сандарынан*** ерекшелеп ***ақырсыз сандар*** деп атайды.

$-\infty$ және $+\infty$ ақырсыз сандарымен толықтырылған R нақты сандар жиыны ***кеңейтілген нақты сандар жиыны*** немесе ***кеңейтілген сандар өсі*** деп аталады да, $\overline{R}$ арқылы белгіленеді: $\overline{R} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Келесі **ақырсыз интервалдарды** жазып көрсетейік:

$$(-\infty;a] = \{x\in R: x\le a\}; \qquad [-\infty;a] = \{-\infty\}\cup(-\infty;a];$$
$$(-\infty;a) = \{x\in R: x< a\}; \qquad [-\infty;a) = \{-\infty\}\cup(-\infty;a);$$
$$[a,+\infty) = \{x\in R: x\ge a\}; \qquad [a;+\infty] = [a;+\infty)\cup\{+\infty\};$$
$$(a,+\infty) = \{x\in R: x> a\}; \qquad (a;+\infty] = (a,+\infty)\cup\{+\infty\}.$$
$$R\equiv (-\infty;+\infty)=\{x\in R: -\infty<x<+\infty\};$$
$$\overline{R}=[-\infty;+\infty]=\{-\infty\}\cup(-\infty;+\infty)\cup\{+\infty\}.$$

Кеңейтілген сандар өсіндегі нүктенің ε-эпсилон $(\varepsilon>0)$ **маңайы** (төмендегі суретті қараңыз)

1) $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ аралығы a нақты санының ε маңайы деп аталады да $O_\varepsilon(a),\ U_\varepsilon(a),$ т.с.с. символдармен белгіленеді: $O_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon).$ Бұл маңайды келесі түрлердеде жазуға болады

$$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)=\{x\in R:\ a-\varepsilon<x<\ a+\varepsilon\ \}=$$
$$=\{x\in R:\ -\varepsilon<x-a<\varepsilon\ \}=\{x\in R:\ |x-a|<\varepsilon\ \}=O_\varepsilon(a).$$

Ендеше, $O_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)=\{x\in R: |x-a|<\varepsilon\}.$

2) Егер $a=+\infty$ болса, онда

$$O_\varepsilon(+\infty)=(\varepsilon,+\infty]=\{x\in R: x>\varepsilon\}\cup\{+\infty\};$$

3) Егер $a=-\infty$ болса, онда

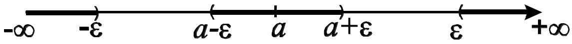
$$O_\varepsilon(-\infty) = [-\infty,-\varepsilon)=\{x\in R: x<-\varepsilon\}\cup\{-\infty\}.$$

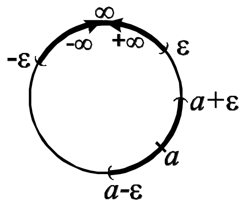
Сонымен бірге математикада **ақырсыздық** деп аталатын ∞ символы да жиі пайдаланылады. ***Таңбасы көрсетілмеген ақырсыздық үшін реттік қатыс болмайды***. Оның ε маңайы келесі түрде жазылады (төмендегі суретті қараңыз)**:**

4) $O_\varepsilon(\infty)=[-\infty;-\varepsilon)\cup(\varepsilon;+\infty]=\{x\in R: |x|>\varepsilon\}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}.$

Егер a ақырлы немесе ақырсыз нүктені білдірсе, онда оның қандай да бір маңайын $U(a),\ O(a)$, т.с.с. белгілейді.

Ескерту. Соңғы 2), 3) және 4) анықтамаларда $\varepsilon > 0$ шарты тек анықтамалар бірдей түрде тұжырымдалуы үшін ғана қажет.





Егер a ақырлы немесе ақырсыз нүктені білдірсе, онда оның қандай да бір маңайын $U(a)$, $O(a)$, т.с.с. белгілейді.

Ескерту. Соңғы 2), 3) және 4) анықтамаларда $\varepsilon > 0$ шарты тек анықтамалар бірдей түрде тұжырымдалуы үшін ғана қажет.

Мысалдар. 1) $O_{0,1}(10) = (9,9;\ \ 10,1)$; **2)** $O_{100}(+\infty) = (100;\ \ +\infty]$;

3) $O_{100}(-\infty) = [-\infty;\ \ -100)$; **4)** $O_{10}(\infty) = [-\infty;\ \ -10) \cup (10;\ \ +\infty]$.

$X = \{x\} \subset R$ – кез келген нақты сандар жиыны болсын.

Егер кез келген $x \in X$, яғни $X-$жиынының кез келген элементі үшін, $x \le M$ теңсіздігі орындалатын $M \in R$ нақты саны бар болса (кванторлар тілінде: $\forall x \in X,\ \exists M \in R:\ x \le M$), онда X – **жоғарыдан шенелген жиын,** ал M – оның **жоғарғы шекарасы** деп аталады. Бұл жағдайда кез келген $M' > M$ саны да X жиынының жоғарғы шекарасы бола алатындықтан $[M;\ +\infty]$ аралығы X жиынының ***жоғарғы шекаралар жиынын*** құрайды: $X_{æ\,ø} = [M;\ +\infty]$. *Мысалы*, $X = \{-2\} \cup [1;3) \cup (10;15)$ жиынының жоғарғы шекарасы $M = 15$, өйткені, $\forall x \in X,\ \exists M = 15:\ x \le 15$. Бұл жиынның жоғарғы шекаралар жиыны – $X_{æ\,ø} = [15;+\infty]$.

Егер кез келген $x \in X$ үшін $x \geq m$ теңсіздігі орындалатындай $m \in R$ нақты саны табылса (кванторлар тілінде: $\forall x \in X$, $\exists m \in R\colon\ x \geq m$), онда X – **төменнен шенелген жиын**, ал m – оның **төменгі шекарасы деп аталады.** Бұл жағдайда кез келген $m' < m$ саны да X жиынының төменгі шекарасы бола алатындықтан $[-\infty;\ m]$ аралығы X жиынының ***төменгі шекаралар жиынын*** құрайды: $X_{Òæ} = [-\infty;\ m]$. *Мысалы*, жоғарыдағы $X = \{-2\} \cup [1;3) \cup (10;15)$ жиынының төменгі шекарасы: $m = -2$, өйткені, $\forall x \in X,\ \exists m = -2\colon\ x \geq -2.$ Ал оның төменгі шекаралар жиыны: $X_{Òæ} = [-\infty; -2]$.

Егер X төменнен де, жоғарыдан да шенелген, яғни

$$\forall x \in X,\ \exists m \in R,\ \exists M \in R\colon\ m \leq x \leq M, \tag{1}$$

болса, онда X – **шенелген жиын** деп аталады.

Мысалы, жоғарыдағы $X = \{-2\} \cup [1;3) \cup (10;15)$ – шенелген жиын, өйткені, $\forall x \in X,\ \exists m = -2,\ M = 15\colon\ -2 \leq x \leq 15.$

Дербес жағдайда, егер

$$\forall x \in X,\ \exists M > 0\colon\ |x| \leq M, \tag{1$'$}$$

яғни кез келген $x \in X$ нақты саны үшін $-M \leq x \leq M$ қос теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ нақты саны бар болса, онда X – **шенелген жиын.** *Мысалы,* **а)** $(-3;1)$ – шенелген жиын, өйткені, $\forall x \in (-3,1)$, $\exists\ M = 3\colon\ |x| \leq 3$; **б)** $\sin x$ функциясының мәндер жиыны – шенелген жиын, өйткені, $\forall x \in R,\ \exists M = 1\colon\ |\sin x| \leq 1.$

Егер X жоғарыдан шенелмеген жиын болса, онда кез келген $M > 0$ саны үшін $x_0 \leq M$ шарты *орындалмайтындай* $x_0 \in X$ элементі табылады деген сөз ($\overline{x_0 \leq M} \Leftrightarrow (x_0 > M)$). Сондықтан, (1$'$) тұжырымын терістейтін тұжырымды құрастыру үшін, кванторлар астындағы өрнектерді өзара орын ауыстырады да тұжырымды оған қарама қарсы тұжырымға ауыстырады

$$\overline{\forall x \in X,\ \exists M > 0\colon |x| \leq M} \Leftrightarrow (\forall M > 0,\ \exists x_0 \in X\colon |x_0| > M). \tag{2}$$

Мысалы, **а)** натурал сандар жиыны $\mathrm{N}=\{1,2,...\}$ – жоғарыдан шенелмеген, өйткені, $\forall M>0, \exists x_0=[M]+1\in \mathrm{N}: \ |x_0|>M$. Бірақ $\forall n\in \mathbf{N}, \ n<+\infty$, орындалатындықтан **N** жиынының жоғарғы шекарасы ретінде $+\infty$ алынады;

б) бүтін сандар жиыны $\mathrm{Z}=\{...-2,-1,0,1,2,...\}$ – жоғарыдан да төменнен де шенелмеген жиын, бірақ $\forall n\in \mathbf{Z}, \ -\infty<n<+\infty$ орындалатындықтан, **Z** жиынының төменгі шекарасы: $-\infty$, ал жоғарғы шекарасы: $+\infty$.

$X\subset \overline{R}$ сандар жиынында ең үлкен *M* (ең кіші *m*) саны бар болуы мүмкін. Басқаша айтқанда, әрбір $x\in X$ үшін $x\le M$ $(x\ge m)$ теңсіздігін қанағаттандыратын $M\in X$ $(m\in X)$ саны бар болуы мүмкін. Мұндай жағдайда *M* санын (*m* санын) *X* ***сандар жиынының ең үлкен элементі (ең кіші элементі)*** деп атайды да, келесі түрде белгілейді: $M=\max X=\max\limits_{x\in X} x$ $\quad (m=\min X=\min\limits_{x\in X} x)$.

$X\subset R$ жиынының ***жоғарғы шекаралар жиынының ең кіші элементі X*** жиынының ***дәл жоғарғы шекарасы*** деп аталады да, $\sup X$ немесе $\sup\limits_{x\in X}\{x\}$ арқылы белгіленеді және «супремум *X*» деп оқылады (*лат: supremum – ең жоғарғы*): $\sup\limits_{x\in X}\{x\}=\min X_{æø}$.

$X\in R$ жиынының ***төменгі шекаралар жиынының ең үлкен элементі*** X жиынының ***дәл төменгі шекарасы*** деп аталады да, $\inf X$ немесе $\inf\limits_{x\in X}\{x\}$ арқылы белгіленеді және «инфимум *X*» деп оқылады (*лат: infimum – ең төменгі*): $\inf\limits_{x\in X}=\max X_{Òø}$.

Мысал. $X=[2;3)$ жиынының ең кіші элементі бар: $\min X=\min[2;3)=2$, өйткені $\forall x\in[2;3), \ x\ge 2$ және $2\in X$. Бірақ бұл жиынның ең үлкен элементі жоқ. Шынында да, 3 саны ең үлкен элемент бола алмайды, өйткені, $3\notin X$. Бұдан, кез келген $M>3$ саны да ең үлкен элемент бола алмайтыны шығады. Кез келген $2<c<3$ саны да ең үлкен элемент бола алмайды, өйткені $c<c'<3$

болатындай $c' \in X$ элементі табылады (мысалы, $c' = \frac{c+3}{2}$ саны; $c < \frac{c+3}{2} < 3$ теңсіздіктерін тексеріңіздер);

$\sup[2;3) = 3$, өйткені «3» саны $X = [2;3)$ жиынының жоғарғы шекаралар жиыны - $[3;+\infty)$ аралығының ең кіші элементі;

$\inf[2;3) = \min[2;3) = 2$ болатынын көрсету оқушыға тап-сырылады.

Егер X – жоғарыдан (төменнен) шенелмеген жиын болса, онда $\sup X = +\infty$ $\left(\inf X = -\infty\right)$. Мысалы, $\sup \mathrm{N} = +\infty$; $\inf \mathrm{Z} = -\infty$.

Ескерту. Дәл жоғарғы шекара (дәл төменгі шекара) анықтамасын басқаша түрлерде де беруге болады. Солардың бір түрін келтірейік.

X – сандар жиыны берілсін (ол шенелмеген болуы да мүмкін).

Егер,

1) $\forall x \in X,\ x \le M \quad (x \ge m)$;

2) кез келген ақырлы $M_1 \le M$ $(m_1 \ge m)$ саны үшін $M_1 < x_1 \le M$ $(m_1 > x_1 \ge m)$ теңсіздігі орындалатындай $x_1 \in X$ саны бар болса, онда M (сәйкес m) саны (ақырлы немесе ақырсыз) X жиынының ***дәл жоғарғы (дәл төменгі) шекарасы*** деп аталады.

§ 4.2. Функция

4.2.1. Функция және оның берілу тәсілдері.

D қандай да бір сандар жиыны болсын. Егер әрбір $x \in D$ санына жалғыз y санын сәйкес қоятын f ережесі көрсетілсе, онда D жиынында **сан мәнді функция** берілді дейді және оны $y = f(x)$, $x \in D$ арқылы белгілейді. Ереже *f,g,h,* … әріптерімен, кейде y әрпінің өзімен де белгілене береді, мысалы $y = y(x)$.

D – функцияның **анықталу жиыны (аймағы)**, ал $E = \{y \in R: y = f(x),\ x \in D\}$ – функцияның **мәндер жиыны** деп аталады. Бұл жағдайда E жиыны D жиынының f функция бойынша алынған **бейнесі** деп аталады да $f: D \to E$ немесе $E = f(D)$ арқылы белгіленеді. y –

тәуелді айнымал шама, ал x – **аргумент** деп аталады. Аргумент – тәуелсіз айнымал немесе басқа бір тәуелсіз айнымал t-ге тәуелді шама болуы да мүмкін: $x=\varphi(t)$. Аргументтің берілген x_0 мәніне сәйкес келетін $y_0=f(x_0)$ санын, $x=x_0$ нүктесіндегі **функция мәні** деп атайды (оны $f(x)\big|_{x=x_0}$ арқылы да белгілейді).

Функция түсінігі санды мәнді функциялармен ғана шектелмейді.

D және E – табиғаты кез келген жиындар болсын.

Анықтама. *Егер әрбір $x\in D$ элементіне қандай да бір f ережесі бойынша жалғыз $y=f(x)\in E$ элементі сәйкес келсе, онда D жиынында анықталған f функциясы берілді дейді.*

Мысалы, егер D – кеңістіктегі векторлар жиыны, ал $E=[0;+\infty)$ сандар жиыны болса, онда $y=|\vec{x}|$ функциясы әрбір $\vec{x}\in D$ векторына оның модулін сәйкес қояды: $y=|\vec{x}|\in E$.

Функцияларды түрлі тәсілдермен беруге болады.

1. **Кестелік тәсіл**. Функция кесте түрінде берілуі мүмкін. Мысалы, T - ауа температурасы сағат сайын өлшенсін. Онда әрбір $t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 24$ уақыт мезгілдеріне $T_0,\ T_1, ..., T_{24}$, сандары сәйкес келеді, яғни 0-ден 24-ке дейінгі бүтін сандар жиынында анықталған кестемен берілген $T=f(t)$ функциясын аламыз (кестені қараңыз).

t	0	1	2	…	24
T	T_0	T_1	T_2	…	T_{24}

Бұл тәсіл функцияны толық сипаттай алмайды, өйткені кесте функцияның анықталу аймағындағы барлық нүктелерді қамтуы мүмкін емес. Мысалы, мына төменде көрсетілген кестедегі мәндер $y=x$ және $y=x^3$ функцияларының екеуін де қанағаттандырады:

x	–1	0	1
y	–1	0	1

Графиктік тәсіл. *OXY* жазықтығындағы $x \in D$ және $y=f(x)$ болатын $(x,\ y)$ нүктелер жиыны $y=f(x)$ функциясының **графигі** деп аталады.

Аналитикалық тәсіл. Мұнда x аргументінің берілген мәніне сәйкес келетін функция мәнін есептеу алгоритмі $y = f(x)$ нақты көрсетіледі. Бұл жағдайда функцияның анықталу жиыны деп, берілген өрнектің мағынасы болатындай x аргументінің жиынын түсінеді.

Мысалы, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясының анықталу жиыны

$D = \{x : |x| < 1\} = (-1;1),$ ал мәндер жиыны $E = \{y \in R:\ y \geq 1\} = [1;+\infty).$

$f\colon D \to E$ функциясы $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2$ мәндеріне $f(x_1) \neq f(x_2)$ шарты орындалатындай $y_1 = f(x_1),\quad y_2 = f(x_2)$ мәндерді сәйкестендіретін функция болсын. Онда әрбір $y \in E$ санына $f(x) = y$ болатындай қандай да бір анықталған $x \in D$ санының сәйкес қойылуы мүмкін. Осылай анықталған $f^{-1}: E \to D$ функциясы берілген f функциясына **кері функция** деп аталады. $y = f(x)$ функциясына кері функцияны табу үшін бұл теңдеудегі x-ті табамыз: $x = f^{-1}(y),$ содан соң бірыңғайлылық үшін x пен y-ті өзара орын алмастырамыз.

Мысалы, $y = 5x$ функциясына кері функция $y = \dfrac{1}{5}x.$

Егер $f : X \to Y$ және $g : Y \to Z$ функциялары берілсе, онда олардың **композициясы** немесе **күрделі функциясы** деп, $h = h(x) = g(f(x)),\quad x \in X$ теңдігімен анықталған, $h = g \circ f : X \to Z$ арқылы белгіленетін функцияны айтады.

Мысалы, $f(x) = x + 1$ және $g(x) = x^2$ болса, онда $g(f(x)) = (x+1)^2,\quad f(g(x)) = x^2 + 1$ болады.

Егер $y = f(x)$ функциясының D анықталу жиыны $x = 0$ нүктесімен салыстырғанда ***симметриялы*** *болып, сонымен бірге*

$$\forall x \in D, \quad f(-x) = f(x) \qquad (\forall x \in D, \quad f(-x) = -f(x))$$

теңдігі орындалса, онда $f(x)$ – ***жұп (тақ) функция*** *деп аталады.*

Мысалы, $y = \cos x, \quad y = x^{2n}, \quad n \in N, \quad y = f\left(|x|\right)$ функциялары жұп, ал $y = \sin x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad y = x^{2n-1}, \quad n \in N, \quad y = x \cdot f(|x|)$ функциялары тақ (тексеріңіздер); $y = \sqrt{x}, \quad y = x + x^2$ – жұп та, тақ та емес функциялар.

Екі жұп *немесе* ***екі тақ функциялардың көбейтіндісі – жұп функция, ал жұп функция мен тақ функциялардың көбейтіндісі тақ функция*** *болатынын көру қиын емес* (*көз жеткізіңіз!*)**.** ***Жұп функция графигі*** y ***өсімен салыстырғанда симметриялы, ал тақ функция графигі координат бас нүктесімен салыстырғанда симметриялы.***

Мысалы, $y = signx = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ функциясы $(-\infty;+\infty)$ аралығында анықталған тақ функция. Мәндер жиыны үш нүктеден: $1, \ 0, \ -1$ тұрады.

Анықталу аймағы $x=0$ *нүктесімен салыстырғанда* симмет-риялы кез келген функцияны жұп және тақ функциялардың қосын-дысы ретінде жазуға болады: $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Егер $\forall x \in R$ үшін $f(x+T) = f(x)$ теңдігі орындалатындай T оң саны табылса, онда функция **периодты** (периоды T-ге тең) деп аталады. Мысалы, $\sin x$ функциясының периоды 2π, ал $\sin mx$, $m \in N$ функциясының да периоды 2π болады, бірақ оның ең кіші периоды $T = \dfrac{2\pi}{m}$.

Егер $x_1 < x_2$ болатын $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ сандары үшін:

$f(x_1) \le f(x_2)$ орындалса, онда $y = f(x)$ – **кемімейтін,**

$f(x_1) \geq f(x_2)$ орындалса, онда $y = f(x)$ – **өспейтін,**

$f(x_1) < f(x_2)$ орындалса, онда $y = f(x)$ – **өспелі,**

$f(x_1) > f(x_2)$ орындалса, онда $y = f(x)$ – **кемімелі**

функция деп аталады.

X жиынында осы төрт қасиеттің тек біріне ғана ие болатын функцияны X **жиынында монотонды** деп атайды.

Мысалы, $y = x^2$ функциясы $X = (-\infty;\ 0)$ және $X = (0; +\infty)$ жиындарының аркайсысында монотонды (сәйкес, кемімелі және өспелі), ал $X = (-\infty; +\infty)$ жиынында монотонды емес.

Ескерту. Берілген Δ аралығының нүктелерінде ***нақты мәнге*** немесе $+\infty$, $-\infty$ ақырсыздықтарының біріне тең болатын фунция туралы «функция Δ аралығында ***кең мағынада анықталған»*** деп айтамыз. Мысалы, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3}, & x \neq 3, \\ -\infty, & x = 3 \end{cases}$ функциясы $\left(-\infty, +\infty\right)$ аралы-ғында ***кең мағынада анықталған.***

4.2.2. Элементар функциялар.

Негізгі элементар функцияларға* мына функциялар жатады: $y = C$ (C – *тұрақты*); $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$ – ***дәрежелік функция;*** $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$) – ***көрсеткіштік функция;*** $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) – ***логарифмдік функция***; $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ – ***тригонометриялық функциялар;***

$y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \mathrm{arctg}\, x$ $y = \mathrm{arcctg}\, x$ – ***кері тригонометриялық функциялар***.

Бұл функцияларға арифметикалық амалдар мен функциядан функция алу амалдарын қолданып **элементар функцияларды** аламыз (амалдар саны ақырлы болуы керек).

Мысалы, $y=\lg(a^x+\sin^2 x+1)$ – элементар функция[*].

Мұнда біз негізгі элементар функциялардың қасиеттерін атап, олардың графиктерін ғана көрсетеміз.

1) $y=C$ – тұрақты функция. Мұнда әрбір x нақты санға (нүктеге) бір ғана C саны сәйкес келеді. Бұл функцияның графигі – x өсіне параллель және $y=C$ нүктесі арқылы өтетін түзу.

2) $y=x^a,\ a\in Q,\ a\neq 0$ – ***дәрежелік функцияның*** графигі:

а) $a=n\in N,$ яғни $y=x^n,\ n\in N$ болып, $n=2k,\ (k=1,2,...)$ – жұп сан болған жағдайы 5-суретте, ал $n=2k-1,\ (k=1,2,...)$ – тақ сан болған жағдайы 6-суретте көрсетілген.

б) $y=x^{-n},\ \ n\in N$ – дәрежелік функцияның графигі: n жұп сан болса 7-суретте, ал n тақ сан болса, 8-суретте көрсетілген.

в) $y=x^{\frac{1}{n}},\ \ n\in N$ – дәрежелік функцияның графигі:

n – жұп сан болса 9-суретте, ал n – тақ сан болса 10-суретте көрсетілген.

г) $y=x^{-\frac{1}{n}},\ \ n\in N$ – дәрежелік функцияның графигі:

n – жұп сан болса 11-суретте, ал n – тақ сан болса 12-суретте көрсетілген. Дәреже көрсеткішінің басқа мәндер жағдайларын өздеріңіздің қарастыруларыңызға ұсынамыз.

3) $y=a^x,\ \ a>0,\ \ a\neq 1$ – көрсеткіштік функцияның графигі: $0<a<1$ жағдайы 13-суретте, ал $a>1$ жағдайы 14-суретте көрсетілген.

---

[*] Негізгі элементар функциялар туралы толығырақ мәліметтерді **Айдос Е.Ж., БалықбаевТ.О. Математика бойынша жоғары оқу орындарына түсушілерге арналған құрал, ЖШС РПБК «Дәуір», Алматы 2006,** атты кітаптан қарауға болады.

4) $y=\log_a x,\quad a>0,\quad a\neq 1$ логарифмдік функцияның графигі: $0<a<1$ жағдайы 15-суретте, ал $a>1$ жағдайы 16-суретте көрсетілген.

5) $y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\mathrm{tg}\,x,\quad y=\mathrm{ctg}\,x$ тригонометриялық функциялардың графиктері сәйкес 17-20-суреттерде көрсетілген.

6) $y=\arcsin x$, y = arccos$x$, y = arctg$x$, y = arcctg$x$ кері тригонометриялық функциялардың графиктері 21-24-суреттерде көрсетілген.

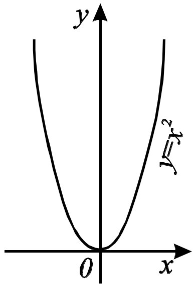
1-мысал. Функцияның анықталу жиынын табу керек:
$y=\arcsin(2x+1)$

▼ Бұл функция – синусы «2x–1»-ге тең болатын бұрыш, ал синус функциясының мәндері [–1; 1] болатындықтан: $-1\leq 2x+1\leq 1$ немесе $-2\leq 2x\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 0$. Сонымен $D=[-1;0]$. ▲

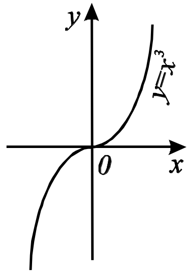
2-мысал. $y=\sqrt{1-x^2}+\log_3 x$ функциясының анықталу жиынын табу керек.

▼ Мұндағы функцияның анықталу жиыны $\sqrt{1-x^2}$ және $\log_3 x$ өрнектері мағыналы болатындай x-тің мәндер жиыны, яғни $\begin{cases}1-x^2\geq 0,\\ x>0,\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиыны. Жүйені шешеміз:

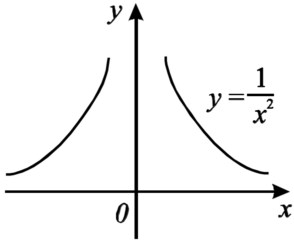
$$\begin{cases}1-x^2\geq 0,\\ x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|\leq 1,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\leq x\leq 1,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\leq 1.\quad D=(0;1].$$ ▲



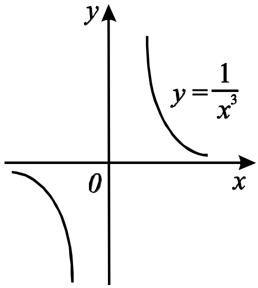
5-сурет



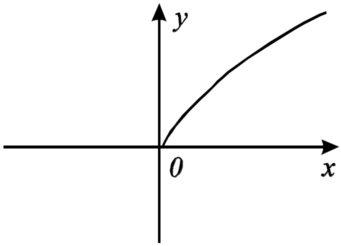
6-сурет



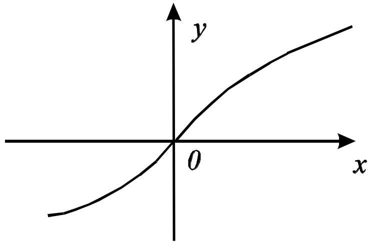
7-сурет



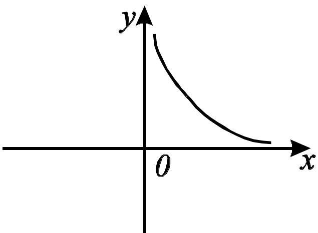
8-сурет

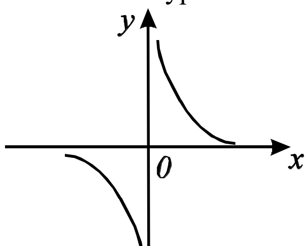


9-сурет

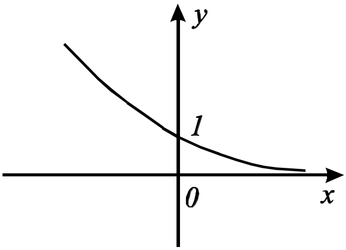


10-сурет

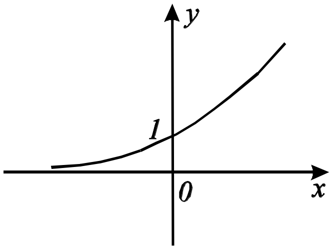




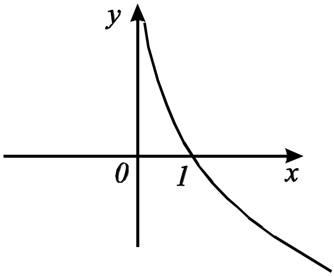
11-сурет 12-сурет



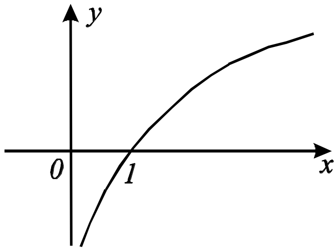
13-сурет



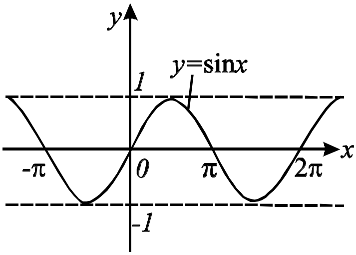
14-сурет



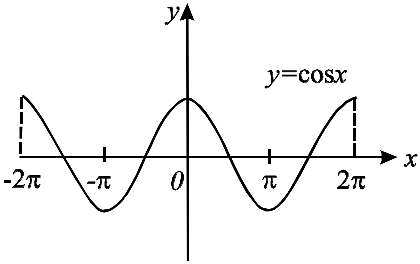
15-сурет



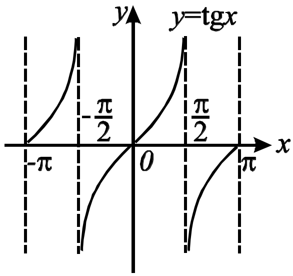
16-сурет



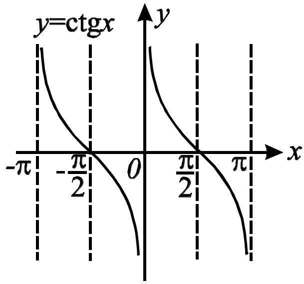
17-сурет



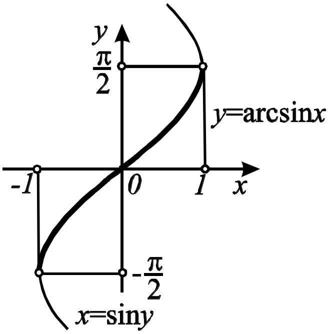
18-сурет



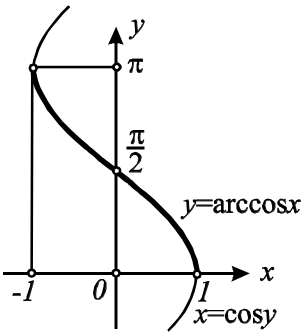
19-сурет



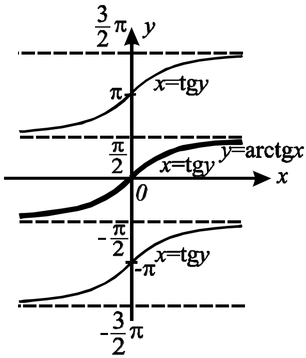
20-сурет



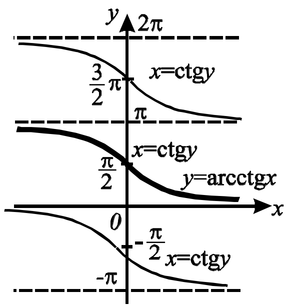
21-сурет



22-сурет



23-сурет



24-сурет

§ 4.3. Сандар тізбегінің шегі

4.3.1. Нақты сандар тізбегі және оның шегі.

Анықтама. Егер әрбір $n = 1,2,3,\dots$ натурал санына қандай да бір f ережесі бойынша $f(n) = x_n$ саны сәйкес қойылса, онда $\{x_n\} = \{x_1, x_2, ...\}$ сандар тізбегі берілді дейді. Басқаша айтқанда, ***нақты сандар тізбегі*** *деп, натурал сандар жиынында анықталған* $f: N \to R$ *функциясын айтады. Мұндай функцияның мәндерін* $x_n = f(n),\ n \in N$ *арқылы белгілейді де, оларды* ***тізбек мүшелері*** *немесе* ***элементтері*** *(кейде* ***айнымал*** x_n *) деп атайды (n саны* x_n *мүшесінің нөмірін көрсетеді).*

Тізбекті, $\{x_n\}$; $x_1, x_2, ...$; $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; $x_n,\ n \in N$; $x_n,\ n = 1,2,...$ символдарымен де белгілейді.

Мысалдар.

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ...\right\}$.   2) $\left\{2^{(-1)^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ ...\right\}$.

3) $\left\{n^{(-1)^n}\right\} = \left\{1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},...\right\}$.   4) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},...\right\}$.

5) $\left\{n^2+1\right\} = \left\{2,\ 5,\ 10,\ ...\right\}$.   6) $\left\{(-1)^n \cdot n\right\} = \left\{-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ ...\right\}$.

7) $\left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{3}{8},\ ...\right)$

Мұндағы 2-мысалда, тізбектің барлық жұп нөмірлі мүшелері «2»-ге тең: $2 = x_2 = x_4 = x_6 = ...$, бірақ сонда да $x_2, x_4, \dots$ әртүрлі элементтер ретінде қабылданады.

$\{x_n\}$ тізбегенің барлық элементтері бір ғана a мәнін қабылдаса, оны **тұрақты тізбек** деп атайды.

Бұл масалдардағы 1), 2) және 4) тізбектер **шенелген**, ал 3), 5) және 6) тізбектер **шенелмеген**. (4.1.4. пункттегі (1) қараңыз). Бірақ 3-мысалдағы тізбек, төменнен «0» санымен, ал 5-мысалдағы тізбек, төменнен «2» санымен шенелген; 6-мысалдағы тізбек төменнен де, жоғарыдан да шенелмеген.

Енді тізбектің шегі туралы ұғымды қарастырайық.

Нөмірлері өскен сайын 1-тізбектің мүшелері 0 санына, ал 4- тізбектің мүшелері 1 санына «жақындай» түсетінін байқауға болады. Бұл тізбектердің мүшелерін екі топқа бөлуге болады: 0 санының (1санының) **кез келген маңайында** 1-тізбектің (4-тізбектің) ***ақырсыз*** элементтері бар да, ал сыртында қалған элементтері бар болса, олардың ***саны ақырлы*** ғана.

Анықтама. *Егер берілген* $\varepsilon > 0$ *саны бойынша, нөмірлері* $n > n_\varepsilon$ *болатын барлық* x_n *элементтер үшін*

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

теңсіздігі орындалатындай n_ε ***оң саны (****ол* ε*-ға тәуелді****) табылса,*** *онда* a ***саны*** $\{x_n\}$ ***тізбегенің шегі*** *деп аталады.*

Бұл шекті $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ немесе $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ арқылы белгілейді де ***«***$\{x_n\}$ ***тізбегі а-ға ұмтылады»*** *немесе* ***«***$\{x_n\}$ ***тізбегі*** *a* ***санына жинақталады»*** деп оқиды (мұндай ***тізбек жинақты*** деп аталады). Мұндағы $a \in R$ болғандықтан, оны кейде ***ақырлы*** немесе ***нақты шек*** деп те атайды (жаңылыс тудырмаған жағдайда $n \to +\infty$ орнына, ықшамдылық үшін, $n \to \infty$ деп жазады).

1-мысал. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ теңдігін дәлелдеу керек.

▼ $\varepsilon > 0$ саны берілсін: $O_\varepsilon(0) = (-\varepsilon,\ \varepsilon)$. Шек анықтамасына сәйкес, нөмірі $\forall n > n_\varepsilon$ болатын $\frac{1}{n}$ элементтер үшін $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай n_ε санын іздейміз. Ол үшін осы теңсіздікті

«n»-ге қатысты шешейік: $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$. Бұдан, егер $n_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}$ деп алсақ, онда нөмірі $\forall n>n_0=\frac{1}{\varepsilon}$ болатын $\frac{1}{n}$ элементтер үшін $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатынын көреміз. Ендеше, анықтама бойынша, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. ▲

Егер, бұл мысалда, $\varepsilon=0{,}1$ берілсе: $O_{0,1}(0)=(-0{,}1;\ 0{,}1)$, онда $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon=0{,}1$ теңсіздігі нөмірлері $n_\varepsilon=\frac{1}{0{,}1}=10$ санынан үлкен $\frac{1}{n}$ элементтер үшін, яғни $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \ldots$ элементтер үшін орындалады; ал егер $\varepsilon=0{,}01$ берілсе: $O_{0,01}(0)=(-0{,}01;\ 0{,}01)$, онда $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon=0{,}01$ теңсіздігі нөмірлері $n_\varepsilon=\frac{1}{0{,}01}=100$ санынан үлкен $\frac{1}{n}$ элементтер үшін, яғни $\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \ldots$ элементтер үшін орындалады, т.с.с.

Егер $\forall n\in N,\quad x_n=a$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim a=a$ екені анық (бұл жағдайда (1)-ші шарт: $|x_n-a|=|a-a|=0<\varepsilon$ кез келген n=1,2,3, ... үшін орындалатындықтан n_ε санын $0\le n_\varepsilon<1$ аралығынан алуға болады).

Назар аударыңыз! Егер $|x_n-a|<\varepsilon$ теңсіздігі тізбектің нөмірлері $n>n_\varepsilon$ болатын барлық элементтері үшін орындалса, онда ол теңсіздік тізбектің, нөмірлері $n>\overline{n_\varepsilon}\ge n_\varepsilon,\quad \overline{n}_\varepsilon<\infty$, болатын элементтері үшін де орындалатыны түсінікті. Демек, n_ε санының рөлін кез келген ақырлы $\overline{n_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ саны атқара алады. Мұндағы басты нәрсе, $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі нөмірлері $n > \overline{n_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$, $\overline{n_\varepsilon} < \infty$ болатын ***барлық*** x_n элементтері үшін (мұндай элементтер — ақырсыз) орындалса болғаны. Басқаша айтқанда, $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі ***орындалмайтын*** элементтердің саны ***ақырлы*** болуы ғана маңызды. Сондықтан, егер $\lim\limits_{n\to 0} x_n = a$ болса, онда $\forall k \in N$ натурал саны үшін де осы $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$ теңдігі орындалады: $|x_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > n_0 \quad \Rightarrow$ $|x_{n+k} - a| < \varepsilon,\quad n+k > n > n_0.$

2-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \quad |q| < 1$.

▼ Егер $q = 0$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ теңдігінің орындалатынын жоғарыда көрдік ($a = 0$). Енді $q \neq 0$, $|q| < 1$ болсын. $\forall \varepsilon > 0$ оң саны берілсін. $\forall n > n_\varepsilon$ нөмірлері үшін $|q^n - 0| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай n_ε санын іздейік. Ол үшін осы теңсіздікті n-ге қатысты шешеміз.

$$|q^n - 0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |q|^n < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \lg|q| < \lg\varepsilon .$$

Бұдан $|q| < 1$ немесе $\lg|q| < \lg 1 = 0$, яғни $\lg|q| < 0$ екенін ескеріп, $n > \dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|} = n_\varepsilon$ аламыз. Сонымен $\forall \varepsilon > 0$ оң саны берілсе, онда $\forall n > n_\varepsilon = \dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$ нөмірлері үшін $|q^n - 0| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады екен, демек, анықтама бойынша, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \quad |q| < 1$. ▲

Шек анықтамасындағы (1) теңсіздікті келесі түрлерде жазуға болады: $|x_n - a| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon .$

Бұдан, нөмірлері $n > n_\varepsilon$ болатын x_n нүктелері «a» нүктесінің ε маңайында жататынын көреміз: $x_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)=O_\varepsilon(a),\ (n>n_\varepsilon)$. Олай болса, шек анықтамасын төмендегіше тұжырымдауға болады.

Егер берілген $\varepsilon>0$ ***саны бойынша нөмірлері*** $n>n_\varepsilon$ ***болатын барлық*** x_n ***элементтері*** $O_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ ***маңайында жататындай*** n_ε ***саны табылса, онда а саны*** x_n ***тізбегінің шегі болады.***

Ал, нөмірлері $n \le n_\varepsilon$ болатын x_n элементтері $O_\varepsilon(a)$ маңайында **жатуы да, жатпауы да мүмкін.** Яғни, $O_\varepsilon(a)$ маңайының сыртында x_n нүктелері бар болса, онда олардың саны ақырлы. Сондықтан шек түсінігін былайша анықтауға да болады: ***егер а нүктесінің <u>кез келген маңайының</u> сыртында жатқан*** x_n ***элементтері* ақырлы *немесе* бос жиын *болса, онда*** a ***нүктесі*** x_n ***тізбегінің шегі болады.***

3-мысал. $\left\{(-1)^{n+1}\right\}=\{1,-1,1,-1,...\}$ (2)

тізбегінің шегі жоқ екенін дәлелдеу керек.

▼ Тізбектің шегі бар және ол a тең деп жорып, осы a санының $\varepsilon=\dfrac{1}{3}$ маңайын алайық: $O_{\frac{1}{3}}(a)=\left(-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{3}\right)$. Арақашықтығы 2-ге тең «–1» және «1» нүктелері ұзындығы $\dfrac{2}{3}$-ге тең $O_{\frac{1}{3}}(a)$ маңайында бір мезгілде жата алмайды. Анықтылық үшін, $1\notin O_{\frac{1}{3}}(a)$ деп алайық. Онда бұл **маңайдың сыртында жатқан**

n = 1,3,5,7,… **нөмірлі** $x_n = 1$ **элементтері ақырсыз жиынды** (!) құрайды. Олай болса a саны берілген тізбектің шегі бола алмайды. Ал a – кез келген нүкте болғандықтан (2) тізбектің шегі жоқ. ▲

4.3.2. Нақты шегі бар тізбектердің қасиеттері.

1-теорема. Егер x_n тізбегінің шегі бар болса, онда ол шек жалғыз.

▼ x_n тізбегінің екі шегі a және b бар деп жориық. Олардың $O_{\varepsilon_1}(a), O_{\varepsilon_2}(b)$ маңайларын $O_{\varepsilon_1}(a)\bigcap O_{\varepsilon_2}(b)=\varnothing$ (яғни қиылыспайтындай) етіп алайық. $x_n\to a$ ұмтылғанда x_n тізбегінің $O_{\varepsilon_1}(b)$

маңайының сыртында жатқан мүшелері ақырлы жиын, олай болса x_n тізбегінің $O_{\varepsilon_2}(b)$ маңайында жатқан мүшелері **ақырсыз жиын бола алмайды,** сондықтан анықтама бойынша b саны x_n тізбегінің шегі бола алмайды. ▲

2-теорема. Егер x_n тізбегі нақты санға жинақталса, онда ол тізбек **шенелген**.

▼ $\lim x_n = a$ деп алайық. $\varepsilon = 1$ саны берілсін. $\forall n > n_1$ нөмірлері бар x_n мүшелері үшін $|x_n - a| < 1$ орындалатындай етіп, n_1 оң бүтін санын табамыз. Онда $(n > n_1)$ $|x_n| - |a| \le |x_n - a| < 1$, бұдан $n > n_1$, $|x_n| < 1 + |a|$ аламыз. Енді $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1}|$, $1 + |a|$ сандарының ең үлкенін M деп алсақ, онда $\forall n \in N$, $|x_n| < M$ аламыз. ▲

Ескерту. Тізбек жинақты болуы үшін тізбектің шенелген болуы қажетті, бірақ (3-мысалдан көргеніміздей) жеткіліксіз.

3-теорема. Егер $x_n \in (a,b)$ жатса, онда $\lim x_n = c \in [a,b]$.

Мысалы, $x_n = \dfrac{1}{n+1} \in (0,1)$, ал $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \in [0,1]$.

4-теорема. Егер $\lim x_n = \lim y_n = a$ және $x_n \le z_n \le y_n$, $n=1,2,\ldots$, орындалса, онда $\lim z_n = a$.

▼ $\varepsilon > 0$ саны берілсін. Онда $\forall n > N_1$ нөмірлері үшін $a - \varepsilon < x_n$, ал $\forall n > N_2$ нөмірлері үшін $y_n < a + \varepsilon$ теңсіздіктері орындалатындай N_1 және N_2 сандары табылады. Ал $\forall n > \max\{N_1, N_2\} = n_\varepsilon$ нөмірлері үшін, $a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon$, яғни $|z_n - a| < \varepsilon$ $(n > n_\varepsilon)$ теңсіздігі орындалады. ▲

Мысалы, $\forall n \in N$, $0 \le \dfrac{1}{n^2+5} \le \dfrac{1}{n}$ және $x_n = 0 \to 0$, $y_n = \dfrac{1}{n} \to 0$

(1-мысал, 3п.) орындалады. Олай болса 4-теорема бойынша $\dfrac{1}{n^2+5} \to 0$ $(n \to \infty)$.

5-теорема. Егер $x_n \to a$ ұмтылса, онда $|x_n| \to |a|$ ұмтылады.

▼ Мына тұжырымдардың парапар екенін көру қиын емес:

$(x_n \to a) \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0$ оң саны берілсе, $\forall\, n > n_\varepsilon$ нөмірлері үшін $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай n_ε саны табылады). Сонымен бірге $\left||x_n| - |a|\right| \le |x_n - a|$ теңсіздігі орындалатыны белгілі. Олай болса, $\forall\, \varepsilon > 0$ саны берілсе, $n > n_\varepsilon, \left||x_n| - |a|\right| \le |x_n - a| < \varepsilon$ орындалатын n_ε саны бар, яғни $\lim |x_n| = |a|$. ▲

Нақты шегі бар тізбектерге жасалатын арифметикалық амалдар

6-теорема. Егер $\lim x_n = a$ және $\lim y_n = b$ нақты шектері бар болса, онда $\lim(x_n \pm y_n)$, $\lim(x_n \cdot y_n)$, $\lim \dfrac{x_n}{y_n}$ $(\lim y_n \neq 0)$ шектері де бар, сонымен бірге келесі теңдіктер орындалады:

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n;$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n.$$

Бұл теңдіктің салдары:

$$\lim c \cdot x_n = c \cdot \lim x_n, \quad c - const \quad \text{(көз жеткізіңіз)};$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \ \lim y_n \neq 0 \cdot$$

▼ $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$ теңдігінің дәлелдемесін келтірейік. ε>0 саны берілсін. $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ теңдіктерінің анықтамасы бойынша $\forall n > n_\varepsilon$ нөмірлері үшін $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, теңсіздіктері орындалатындай n_ε саны табылады. Онда

$$\left|\left(x_n+y_n\right)-\left(a+b\right)\right|=\left|\left(x_n-a\right)+\left(y_n-b\right)\right|\le\left|x_n-a\right|+\left|y_n-b\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

теңсіздігі кез келген $n>n_\varepsilon$ үшін орындалады. Анықтама бойынша бұдан $\lim\left(x_n+y_n\right)=\lim x_n+\lim y_n$ шығады. ▲

Ескерту. Бұл теоремаға кері тұжырымның дұрыс еместігін мына мысалдан көреміз: $x_n=(-1)^{n+1},\ y_n=(-1)^n$ болса, онда $\{x_n+y_n\}=\{0,0,...,0,...\}$ тізбегінің $\lim\left(x_n+y_n\right)=0$ шегі бар, бірақ $\lim(-1)^{n+1},\ \lim(-1)^n$ шектері жоқ.

4.3.3. Ақырсыз кішкене және ақырсыз үлкен шамалар.

Шегі нөлге тең α_n тізбегін **ақырсыз кішірейетін шама** немесе қысқаша, **ақырсыз кішкене** деп атайды. Сонымен, егер $\forall\varepsilon>0$ саны арқылы $\forall n>n_\varepsilon$ нөмірлері үшін $\left|\alpha_n\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай n_ε **саны табылса** $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0\right)$, онда α_n – ақыр-сыз кішкене шама.

Айнымал x_n-нің ***шегі*** a ***саны болуы үшін,*** $x_n=a+\alpha_n$ ***теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті (***α_n ***– ақырсыз кішкене).***

Анықтама. Егер берілген $E>0$ саны бойынша нөмірлері $n>n_E$ болатын β_n элементтері үшін $\left|\beta_n\right|>E$ теңсіздігі орындалатындай n_E ***саны табылса***, онда β_n тізбегін **ақырсыз үлкейетін шама** немесе **ақырсыз үлкен** деп атайды да,

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\infty \quad \text{немесе} \quad \beta_n\to\infty,\ n\to\infty \tag{1}$$

деп жазады және β_n ***ақырсыздыққа ұмтылады*** дейді. Егер ақырсыз үлкен β_n қандай да бір n_0 санынан бастап ***тек оң мәндер*** немесе ***тек теріс мәндер*** қабылдаса, онда сәйкес

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=+\infty \quad \text{немесе} \quad \beta_n\to+\infty,\ \ n\to\infty\ ; \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=-\infty \quad \text{немесе} \quad \beta_n\to-\infty,\ n\to\infty\ . \tag{3}$$

Ескерту! Жалпы жағдайда ***тізбектің шегі*** **нақты (ақырлы) сан, плюс ақырсыз** немесе **минус ақырсыз** болуы мүмкін: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \ A \in \overline{R} = \left[-\infty,\ +\infty\right].$ Бірақ таңбасы көрсетілмеген ∞ ***ақырсыздықты тізбектің шегі ретінде қабылдауға болмайдыйды!*** Мысалы, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+n) = +\infty$ ***шегі бар, ал*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1\right)^n n = \infty$ болғанмен, ***бұл тізбектің шегі жоқ.***

Келесі қасиеттер орындалады (көз жеткізіңіз):

1°. Егер x_n ақырсыз кішкене болса, онда $\dfrac{1}{x_n}$ ақырсыз үлкен, және, керісінше, x_n ақырсыз үлкен болса $\dfrac{1}{x_n}$ ақырсыз кішкене.

2°. Ақырсыз кішкене тізбектің шенелген тізбекке көбейтіндісі ақырсыз кішкене, яғни егер $\lim x_n = 0$ және $\forall n \in N,\ \left|y_n\right| \le M$ болса, онда $\lim x_n \cdot y_n = 0.$

3°. Егер x_n ақырсыз үлкен, ал $\left|y_n\right|$ төменнен оң санмен шенелген болса, онда $x_n \cdot y_n \to \infty$, яғни олардың көбейтіндісі ақырсыз үлкен.

Мысалы, $\lim\dfrac{1}{n} = 0$ және $\left|\sin n\right| \le 1$, яғни $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ – ақырсыз кішкене, ал $\sin n$ – шенелген тізбек. Олай болса 2° бойынша: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n} = 0$.

Ескерту. Егер $\left\{x_n\right\}$ шенелмеген тізбек болса, онда оның ақырсыз үлкен болуы міндетті емес.

Мысалы, $\left\{n^{(-1)^n}\right\} = \left\{1, 2, \dfrac{1}{3}, 4, ...\right\}$ шенелмеген тізбек, бірақ ол ақырсыз үлкен емес (*көз жеткізіңіз*).

4.3.4. Анықталмаған өрнектер

1 Егер $\lim x_n = \lim y_n = 0$ $(y_n \neq 0)$ болса, онда $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ тізбегінің шегі туралы алдын ала анық еш нәрсе айта алмаймыз.

Мысалы,

егер $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n^2}$ болса, онда $\dfrac{x_n}{y_n} = n \to +\infty$ $(n \to \infty)$;

егер $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$ болса, онда $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$;

егер $x_n = \dfrac{a}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$ болса, онда $\dfrac{x_n}{y_n} = a \to a$ $(n \to \infty)$;

егер $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$ болса, онда $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ шегі жоқ.

Сонымен $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ шегін табу үшін $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ болатынын білу жеткіліксіз. Бұл жағдайда x_n мен y_n айнымалдарының өзгерістерін сипаттайтын қосымша мәліметтер қажет немесе $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ шегін табуға арнайы тәсілдер қолдану қажет. $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ болса, онда $\dfrac{x_n}{y_n}$ өрнегі $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ **түріндегі анықталмаған өрнек** деп аталады.

Анықталмаған өрнектердің кейбіреулерін атап өтейік.

Егер:

2) $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ болса, онда $\dfrac{x_n}{y_n}$ өрнек, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ **түріндегі;**

3) $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$ болса, онда $x_n \cdot y_n$ өрнек, $(0 \cdot \infty)$ **түріндегі;**

4) $x_n \to +\infty,\ y_n \to -\infty$ болса, онда $x_n + y_n$ өрнек, $(\infty - \infty)$ **түріндегі**

5) $x_n \to 1,\ y_n \to \infty$ болса, онда $x_n^{y_n}$ өрнегі 1^{∞} **түріндегі *анықталмаған өрнектер*** деп аталады.

Анықталмаған өрнектердің басқа түрлері алдымызда келтіріледі.

Анықталмағандықты ашу – сәйкес өрнектің шегін (егер ол шек бар болса) табу деген сөз.

Мысал. Есептеу керек: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

▼ Мұнда $x_n - y_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ өрнегі $(\infty-\infty)$ түріндегі анықталмаған өрнек. Осы анықталмағандықты ашайық:

$$x_n - y_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0, \quad n \to \infty.$$ ▲

4.3.5. Монотонды тізбектер. *e* саны

Анықтама. *Егер* $\forall n \in N$ *натурал сандары үшін*

$$x_n \le x_{n+1} \ \ (x_n \ge x_{n+1}) \qquad (1)$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ ***кемімейтін (өспейтін) тізбек*** *деп аталады.*

Егер (1) қатыс **қатаң теңсіздіктер** арқылы:

$x_n < x_{n+1}$, $(x_n > x_{n+1})$ орындалса, онда $\{x_n\}$ **өспелі (кемімелі)** тізбек деп аталады.

Егер $\{x_n\}$ тізбегі үшін осы төрт жағдайдың тек бірі ғана орындалса, онда оны ***монотонды тізбек*** дейді.

Кемімейтін (өсетін) тізбектер **төменнен** x_1 санымен, өспейтін (кемитін) тізбектер **жоғарыдан** x_1 санымен шенелген.

Мысалдар.

1) $\left\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots\right\}$ – **өспейтін тізбек,** ол жоғарыдан $x_1=1$ санымен шенелген;

2) $\left\{n^2+1\right\}=\left\{2,5,10,\ldots\right\}$ – **өспелі тізбек,** төменнен $x_1=2$ санымен шенелген.

Монотонды емес тізбекке, мысалы, $\left\{1,\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{3}{6},\frac{1}{7},\frac{3}{8},\ldots\right\}$ жатады, ол шегіне біресе жақындап, біресе алыстап ырғалып ұмтылады.

Келесі теорема анализде жиі қолданылады (оның дәлелдеуін, мысалы, [2] кітаптан қарауға болады).

Теорема. Егер $\left\{a_n\right\}$ – ***кемімейтін (өспейтін)*** *тізбек және ол* ***жоғарыдан M санымен (төменнен m санымен)*** шенелсе, онда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad a \le M \quad (a \ge m) \tag{2}$$

орындалатындай a саны табылады.

Мысал. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$, ($a$ – кез келген сан) (3)

теңдігін дәлелдеу керек.

▼ $a \ge 0$ болсын. $u_n=\frac{a^n}{n!}$ деп алсақ, онда $\forall n > a-1$ нөмірлері үшін $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!a^n}=\frac{a}{n+1}<1$, немесе $\forall n > a-1$, $u_{n+1}<u_n$ орындалатынын көреміз. Яғни $\left\{u_n\right\}$ тізбегі $n > a-1$ нөмірлері үшін ***кемімелі.*** Сонымен бірге $u_n=\frac{a^n}{n!}$ тізбегі ***төменнен*** 0 ***санымен шенелген.*** Сондықтан жоғарыдағы теоремадан

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=m, \quad m \ge 0$$

және $m=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}\cdot\dfrac{a}{n+1}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}u_n\cdot\dfrac{a}{n+1}=m\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1}=m\cdot 0=0$ аламыз. Олай болса, кез келген $a\geq 0$ үшін (3) теңдік дұрыс. Егер $a<0$ болса, онда да (алдыңғы дәлелдегеніміз бойынша) $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|=\dfrac{|a|^n}{n!}\to 0,\quad n\to\infty$ шығады. (3) теңдік дәлелденді. ▲

Ескерту. Келесі қатыстар математикада жиі пайдаланылады: ($\alpha>0, |a|>1$): $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0,$ немесе

($\alpha>0, |a|>1$): $\ln n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n,\quad n>n_0>0.$

Жаттығу. Дәлелдеу керек:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $a>0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & |q|<1,\\ \infty, & |q|>1.\end{cases}$

Осы жаттығудағы 3-мысалда $q=1$ жағдайын қарастыру үшін жоғарыдағы теорема көмегімен

$$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \tag{4}$$

түріндегі тізбектің шегі бар екенін көрсетейік. Ол үшін алдымен (4) тізбектің **өспелі** және **жоғарыдан шенелгендігін** көрсетейік.

Тізбектің жалпы мүшесіне Ньютон биномының формуласын:

$$\left(a+b\right)^n=a^n+n\cdot a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+b^n=$$

$=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k$ қолдансақ

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (5)$$

аламыз. Бұл теңдіктен $\forall n\in N,\ \ x_n\geq 2$ болатыны көрініп тұр. Енді (4) *тізбектің жоғарыдан шенелгендігін* көрсетейік. Ол үшін (5) теңдікке $\forall k=2,\ldots,n,\ \ 1-\dfrac{k-1}{n}\leq 1$ және $\forall n=1,2,\ldots,\ 2^{n-1}\leq n!$ теңсіздіктерін пайдаланамыз:

$$x_n\leq 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{n!}\ \leq\ 2+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\ \leq$$

$$\leq\ 2+\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

Енді (4) *тізбектің өспелі* екенін көрсетейік ((5) қараңыз)

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \qquad (6)$$

(5) пен (6) теңдіктерді салыстырсақ, $\forall n\in N,\ \ x_n<x_{n+1}$ орындалатынына көз жеткізуге болады.

Сонымен (4) тізбек өспелі, және $\forall n\in N,\ 2\leq x_n\leq 3$ болғандықтан, жоғарыдағы теорема бойынша x_n тізбегі жинақты және $2\leq\lim x_n\leq 3$. Бұл шекті Эйлер саны деп атайды және *e* арқылы белгіленеді. Эйлер саны иррационал сан, оның алғашқы бес мәні: $e = 2,7128...$. Сонымен келесі теңдік дәлелденді

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e. \tag{7}$$

Бұл теңдікті көбінесе $\left(1^{\infty}\right)$ түріндегі анықталмағандықты ашуға пайдаланады. Егер $\{m_n\}$ тізбегі ақырсыз үлкен: $m_n \to \infty,\ n\to\infty$ болса, онда (7) теңдікті жалпы түрде ж азуға болады

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m\ n} = e. \tag{7′}$$

Мысал. Шекті табу керек: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{3n^2-4n}\right)^{2n}$.

▼ Тізбек – (1^{∞}) түріндегі анықталмаған өрнек. Оның шегін (7′) теңдіктегі $\left(1+\dfrac{1}{m_n}\right)^{m\ n}$ түріне келтіре отырып табамыз:

$$\left(\frac{3n^2+1}{3n^2-4n}\right)^{2n} = \left(1-1+\frac{3n^2+1}{3n^2-4n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{4n+1}{3n^2-4n}\right)^{2n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{3n^2-4n}{4n+1}}\right)^{\frac{3n^2-4n}{4n+1}\cdot\frac{4n+1}{3n^2-4n}\cdot 2n} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n^2-4n}{4n+1}}\right)^{\frac{3n^2-4n}{4n+1}}\right]^{\frac{(4n+1)2n}{3n^2-4n}} \to e^{\frac{8}{3}}.$$

Біз мұнда $m_n = \dfrac{3n^2-4n}{4n+1} \to \infty,\ n \to \infty,$ яғни $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m_n}\right)^{m\ n} = e$

және $\dfrac{(4n+1)2n}{3n^2-4n} \to \dfrac{8}{3},\ n\to\infty$ қатыстарын пайдаландық. Сонымен, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{3n^2-4n}\right)^{2n} = e^{\frac{8}{3}}$. ▲

4.3.6. Тізбектің жинақталуының Коши критерийі.

$\{x_n\}$ тізбегі a нақты санына жинақталсын: $\lim\limits_{n\to a} x_n = a.$ Бұл – «$\forall\varepsilon > 0$ берілсе $\forall n > n_\varepsilon$ нөмірлері үшін $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орыналатындай $n_\varepsilon > 0$ саны бар» деген сөз. Онда $\forall n > n_\varepsilon,\ \ m > n_\varepsilon$ натурал сандары үшін $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le$ $\le |x_n - a| + |x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Сонымен егер x_n айнымалдың **ақырлы шегі** бар болса, онда ол үшін келесі Коши шарты орындалады: кез келген $\varepsilon > 0$ саны берілсе, $\forall n, m > n_\varepsilon$ нөмірлері үшін $|x_n - x_m| < \varepsilon$ теңсіздігі дұрыс болатындай n_ε саны табылады.

Коши шартын қанағаттандыратын сандар тізбегін **фундаментальды (іргелі) тізбек** немесе **Коши тізбегі** деп атайды.

Коши шартына кері тұжырым да орындалады:

егер $\{x_n\}$ нақты сандар тізбегі Коши шартын қанағаттандырса, онда $\{x_n\}$ тізбегінің ақырлы шегі бар.

Бұл екі тұжырымды келесі теорема арқылы беруге болады.

Теорема *(шектің бар болуының Коши критерийі).* $\{x_n\}$ нақты сандар тізбегінің ақырлы шегі болуы үшін, оның фундаментальды тізбек болуы қажетті және жеткілікті.

4.3.7. Іштізбек. Жоғарғы және төменгі шектер.

Егер кез келген $\{x_n\}$, n = 1,2, … нақты сандар тізбегі берілсе, онда одан, нөмірлері $n_1 < n_2 < \ ... \ n_k < \ ...$ болатын жаңа $\{x_{n_k}\}$, k = 1,2, … сандар тізбегін алуға болады. Алынған осы тізбек берілген $\{x_n\}$, n = 1,2, … тізбегінің **іштізбегі** деп аталады. Тізбектен ақырсыз (көп) іштізбектер алуға болады. Мысалы,

$$\{1, \ -1, \ 1, \ -1, \ ...\} \tag{1}$$

тізбегінен $\{1, 1, 1, 1, ...\}$, $\{-1, \ -1, \ -1, \ -1, ...\}$, $\{1, -1, -1, 1, -1, -1, ...\}$, т.с.с. іштізбектер алуға болады.

Егер $\{x_n\}$, n=1,2, … тізбегі жинақты болса (оның шегі нақты немесе ақырсыз +∝, -∝ сандар болуы мүмкін), онда оның кез келген іштізбегі де сол санға жинақталатыны түсінікті. Сонымен бірге келесі теорема да орындалады.

Теорема. Кез келген нақты сандар тізбегінен: $\{x_n\}$, n = 1,2, … ақырлы немесе ақырсыз +∝, -∝ сандарының біріне жинақталатын іштізбек бөліп алуға болады.

Мысалы, (1) тізбек жинақсыз болғанымен, одан 1 санына жинақты $\{1, 1, 1, 1, ...\}$ іштізбегін, -1 санына жинақты $\{-1, \ -1, \ -1, \ -1, ...\}$ іштізбегін алуға болады.

Егер $\{x_n\}$ тізбегі жоғарыдан шенелмеген болса, онда оның құрамында ақырсыз +∝ санына жинақталатын, ал төменнен шенелмеген болса, ақырсыз -∝ санына жинақталатын іштізбектер бар. Мысалы, $\{-1, \ 2, -3, \ 4, \ ... \} = \left\{(-1)^n n\right\}$ тізбегі – шенелмеген тізбек. Бұл тізбектен ақырсыз +∝ санына жинақталатын $\{2, 4, 6, ...\}$ іштізбегін және ақырсыз – ∝ санына жинақталатын $\{-1, -3, -5, ...\} = \ = \{-(2n-1)\}$ іштізбегін бөліп алуға болатынын көреміз. Ал егер $\{x_n\}$ тізбегі шенелген болса, онда жоғарыдағы теорема келесі Больцано-Вейерштрасс теоремасына келеді (Б. Больцано (1781– 1848) – чех математигі, К.Вейерштрасс (1815-1897) – неміс математигі).

Теорема (Больцано-Вейерштрасс). Кез келген шенелген $\{x_n\}$ тізбегінен қандай да бір нақты санға жинақталатын іштізбек бөліп алуға болады.

Келтірілген теоремалардың дәлелдеуін, мысалы, [2] кітаптан қарауға болады.

Анықтама. $\{x_n\}$ тізбегінің **жоғарғы шегі (төменгі шегі)** деп ***келесі екі шарт*** орындалатындай *M* санын айтады (*M* нақты немесе ақырсыз $+\infty$, $-\infty$ сандары болуы мүмкін):

1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = M$ теңдігі орындалатындай $\{x_{n_k}\}$, k =1,2, … іштізбегі табылады;

2) осы іштізбектен ***басқа*** $\{x_{n_k}\}$, k =1,2, … ***іштізбектері*** үшін $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \le M$ ($\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \ge M$) теңсіздігі орындалады.

Жоғарғы шекті $M = \overline{\lim} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$, ал төменгі шекті $M = \underline{\lim} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$ символдарымен белгілейді.

Мысалы, $\left\{1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ \ldots\right\} = \left\{n^{(-1)^n}\right\}$ тізбегінің жоғарғы шегі $\lim\limits_{n\to\infty} \sup n^{(-1)^n} = +\infty$, төменгі шегі $\lim\limits_{n\to\infty} \inf n^{(-1)^n} = 0$, бірақ тізбектің өзінің шегі жоқ.

Әр кезде $\underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n$ теңсіздігінің орындалатыны анық. Сонымен бірге келесі теорема да орындалады.

Теорема. $\{x_n\}$ тізбегінің шегі (нақты немесе $+\infty$, $-\infty$) болуы үшін, $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті. Бұл жағдайда

$$\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = \lim x_n$$

теңдіктері орындалады.

§ 4.4. Функцияның нүктедегі шегі

4.4.1. Анықтамалар мен түсініктер.

$y = f(x)$ функциясы a нүктесінің белгілі бір $U(a)$ маңайында анықталған болсын (функцияның a нүктесінің өзінде анықталуы маңызды емес).

1-анықтама. *Егер кез келген* $\varepsilon > 0$ *саны бойынша f функция-сының анықталу аймағында жататын және*

$$0 < |x - a| < \delta\ (\varepsilon) \tag{1}$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық x сандары үшін

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon) > 0$ *саны табылса, онда A саны* $f(x)$ *функциясының a нүктедегі шегі деп аталады да,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A; \quad f(x) \to A \quad (x \to a); \quad (x \to a) \Rightarrow (f(x) \to A)$$

символдарының бірімен белгіленеді.

1-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$.

▼ x^2 функциясын 1 нүктесінің белгілі бір мысалы, $O_1(1) = (0;\ 2)$ маңайында қарастырайық. $\forall x \in (0;\ 2)$ үшін

$$|x^2 - 1| = |x+1||x-1| \le 3 \cdot |x-1|$$

теңсіздігі орындалады. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны берілсе, онда

$\delta = \min\left\{1; \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$ деп алуға болады (мұндағы 1 саны 1-нүктесінің маңайының радиусі). Сонда $0 < |x-1| < \ \delta = \min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген *x* үшін

$$\left|x^2-1\right| < 3\,\left|x-1\right| < 3\cdot\delta \le 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

яғни $\left|x^2-1\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Бұл – 1-анықтама бойынша $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$ деген сөз. ▲

2-мысал. Теңдікті дәлелдеу керек: $\lim\limits_{x\to a} A = A, \quad a\in R.$

▼ Шынында да, қандай да бір $\varepsilon>0$ оң саны берілсе, $\left|f(x)-A\right| = \left|A-A\right| = 0 < 0 < \varepsilon$ теңсіздігі кез келген x нүктесінде орындалатыны анық. ▲

2-анықтама. Егер $\forall n\in N,\ x_n\ne a$ шартын қанағаттан-дыратын, a санына жинақталатын ***әрбір*** $\{x_n\}\subset D(f)$ ***тізбегіне*** сәйкес келетін $\{f(x_n)\}$ тізбегінің ***шегі бар*** және ***ол А санына тең*** болса: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A,$ онда A саны $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі шегі деп аталады да, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ немесе $f(x)\to A \quad (x\to a)$ символ-дарының бірімен белгіленеді.

Егер мұнда A шегі ∞, $+\infty$, $-\infty$ ақырсыздықарының біріне тең болса, онда $f(x)$ функциясы $x\to a$ ұмтылғанда ***ақырсыз үлкен шама*** деп аталады.

(1) және (2) анықтамалар – пара-пар. Біз мұнда оның дәлелдеуіне тоқталмаймыз (бұл дәлелдеуді, мысалы, [2] кітаптан карауға болады). 1, 2 анықтамаларды сәйкес ***Коши, Гейне анықтамасы*** дейді.

Ескерту. Егер функцияның берілген нүктеде шегі бар болса, онда ол нақты (ақырлы) сан немесе $+\infty$, $-\infty$ ақырсыздықтарының бірі болуы мүмкін: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ -\infty\le A\le+\infty.$

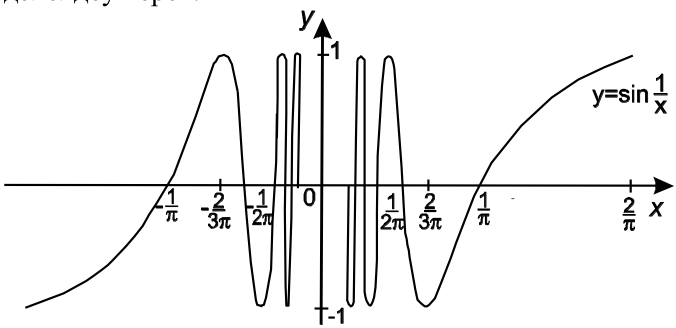
3-мысал. Шекті табу керек: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}.$

▼ $x \to 2$ ұмтылғанда функцияның $x=2$ нүктесіндегі мәні назарға алынбайтындықтан, кез келген $x \neq 2$ үшін $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2.$ Ал $x+2$ өрнегіндегі x орнына, 2-анықтамаға сәйкес, $x_n \to 2$ -ге ұмтылатын кез келген x_n тізбекті қойып, ***сандық тізбектер шегінің қасиеттерін*** пайдаланамыз

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = \lim_{n\to\infty}(x_n+2) = 2+2 = 4.$$

Функцияның шегін есептегенде x_n тізбегін көрсетіп жазып жатпайды, x-ті 2-ге ұмтылатын кез келген тізбек деп қабылдап қысқартып жазады: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = \lim\limits_{x\to 2} x+2 = 4.$ ▲

4-мысал. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ функциясының $x=0$ нүктесіндегі шегі жоқ екенін дәлелдеу керек.



25-сурет

▼ $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ функциясы – $x=0$ **нүктесінің кез келген маңайының барлық** $x \neq 0$ нүктелерінде **анықталған** және тақ функция. 0-ге ұмтылатын $x_k = \dfrac{2}{\pi(2k+1)}$ тізбекке сәйкес келетін

$$f(x_k)=\sin\frac{\pi(2k+1)}{2}=\cos\pi k=(-1)^k$$

тізбегінің шегі жоқ. (4.3.2.п., 3-мысалды қараңыз). Олай болса 2-анықтама бойынша $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ функциясының $x=0$ нүктесінде шегі жоқ (25-сурет). ▲

Анықтама. *Егер кез келген* $\varepsilon>0$ *саны бойынша*

$$a<x<a+\delta \qquad (a-\delta<x<a) \tag{1'}$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon)>0$ *саны табылса, онда A саны* $f(x)$ *функциясының a нүктедегі* ***оң жақ (сол жақ) шегі*** *деп аталады да,* $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A;$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=A,$ $\quad f(a+)=A,$

$$(\lim_{x\to a-} f(x)=A, \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=A, \quad f(a-)=A)$$

символдарының бірімен белгіленеді.

Теорема. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ шегі бар болуы үшін $\lim\limits_{x\to a+} f(x),$ $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ шектері бар әрі олардың өзара тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x)=A. \tag{3}$$

▼ Теореманы A-нақты сан үшін дәлелдейміз ($A=+\infty$ немесе $A=-\infty$ үшін дәлелдеуді оқушыға қалдырамыз). Шынында да (2), теңдіктерді келесі түрде жазуға болады:

$$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta(\varepsilon)>0: \ (\forall x: 0<|x-a|<\delta\ , \ \ x>a\ ) \ \Rightarrow \ |f(x)-A|<\varepsilon;$$

$$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta(\varepsilon)>0: \ (\forall x: 0<|x-a|<\delta, \ \ x<a) \ \Rightarrow \ |f(x)-A|<\varepsilon.$$

(2) қатыстардағы екі теңдіктің де бір мезгілде орындалуына $x>a$ мен $x<a$ шарттарының екеуі де керек. $x>a,\ \ x<a\ \Leftrightarrow\ x\neq a$ екенін ескеріп, алдыңғы кванторлар тілінде жазылған анықтаманы біріктіріп

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \ (\forall x:0<|x-a|<\delta\ (\varepsilon))\ \ \Rightarrow\ \ |f(x)-A|<\varepsilon$$

түрінде жазуға болады. Ал бұл (3) теңдіктің анықтамасы. ▲

Мысалы,

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{x-2}{x-2}=1,\quad \lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1,$ яғни

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{|x-2|}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{|x-2|}{x-2}.$ Олай болса келтірілген теорема бойынша, $\dfrac{|x-2|}{x-2}$ функциясының $x=2$ нүктеде шегі жоқ.

Ескерту. Гейне бойынша анықталған шектер үшін де жоғарыдағы сияқты біржақты шектер ұғымын анықтауға болады.

Енді $y=f(x)$ функциясы $X=\{\,x:|x|>K,\ (K>0)\,\}$ жиынын-да анықталсын.

3-анықтама. *Егер кез келген* $\varepsilon>0$ *саны бойынша* $|x|>\delta(\varepsilon)$ *теңсіздігін қанағаттандыратын барлық* $x\in X$ *үшін* $|f(x)-A|<\varepsilon$ *теңсіздігі орындалатындай* $\delta(\varepsilon)>0$ *саны табылса, онда* $f(x)$ *функциясының x-тің ∞-қа ұмтылғанда шегі бар және ол A санына тең дейді де,* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ *немесе* $f(x)\to A\ \left(x\to\infty\right)$ *т.с.с. символ-дарының бірімен белгілейді.*

Бұл жағдайға да **біржақты шектер** ұғымын келтірейік.

3′-анықтама. Егер кез келген ε>0 саны бойынша $x>\delta(\varepsilon)$ $\left(x<-\delta(\varepsilon)\right)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon)>0$ саны **табылса**, онда *x*-тің $+\infty$ -қа ($-\infty$ -қа) ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі бар және ол *A* санына тең дейді де,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad \text{немесе} \quad f(x)\to A,\ \ x\to+\infty$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad \text{немесе} \quad f(x)\to A,\ \ x\to-\infty\right)$$

символдарының бірімен белгілейді.

Теорема. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ шегі бар болуы үшін $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ және $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ біржақты шектері бар әрі олардың өзара тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=A\ .$$

▼ Дәлелдеуі алдыңғы теорема дәлелдемесі сияқты, жаттығу ретінде өздеріңіз дәлелдеп көріңіздер. ▲

М**ысал.** Дәлелдеу керек: $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{2}.$

▼ Кез келген $\varepsilon>0$ саны берілсін. Онда

$$\left|\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}-\varepsilon<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}+\varepsilon$$

екенін ескерсек, қос теңсіздіктің сол жағынан $\operatorname{arctg} x>\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon$ немесе $x>\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$ шығады. Бұдан $\delta(\varepsilon)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$ деп алсақ, онда $\left|\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon,\quad \forall x: x>\delta(\varepsilon)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$, яғни, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{2}$. ▲

4.4.2. Шегі бар функциялардың қасиеттері

Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ шегі нақты сан болса, онда «$f(x)$ функциясының $x \to a$ ұмтылғанда ***ақырлы шегі бар»*** дейміз;

егер ол шек нақты сан немесе таңбасы көрсетілген $+\infty$, $-\infty$ ақырсыздықтардың біріне тең болса, онда «$f(x)$ функциясының $x \to a$ ұмтылғанда ***шегі бар»*** дейміз.

Ал егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ болса, онда ол функцияның a нүктеде шегі жоқ жағдайға жатады.

Мысалы, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ функциясының $x = 3$ нүктеде $+\infty$ тең шегі бар, өйткені, $f(3+) = f(-3) = +\infty$. Ал $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ функциясының $x = 3$ нүктеде шегі жоқ, өйткені $f(3+) = +\infty$, ал $f(3-) = -\infty$. Бірақ бұл екі функцияның екеуі де $x \to 3$ ұмтылғанда ақырсыз үлкен.

Енді $x \to a$ ұмтылғанда ақырлы шегі бар $f(x)$ функциясының қасиеттерін қарастырайық (мұндағы a – нақты сан немесе ∞, $+\infty$, $-\infty$ ақырсыздықтарының бірі).

1-теорема. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ шегі бар болса, онда ол шек жалғыз.

▼ Бұл қасиет тізбек үшін дәлелденген (4.3.2.пп. 1-теореманы қараңыз). Сондықтан функция шегінің 2-анықтамасы бойынша, ол қасиет функция үшін де дұрыс.▲

2-теорема. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (A–нақты сан), онда $f(x)$ функциясы a нүктесінің белгілі бір $U(a)$ маңайында шенелген, яғни

$$\forall \quad x \in U(a), \;\; x \neq a, \quad |f(x)| \leq M$$

теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ саны табылады (3.2.4.п. шенелген жиын ұғымын қараңыз).

▼ Теорема шарты бойынша, егер $\varepsilon = 1$ саны берілсе, онда

$$\forall x \in U(a), \quad x \neq a \text{ үшін } |f(x) - A| < 1$$

теңсіздігі орындалатындай белгілі бір $U(a)$ маңайы табылады $\left(0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)\right)$ мен $U_\delta(a),\ x \neq a$ парапар!). Бұдан $|f(x)| - |A| \leq |f(x) - A|$ теңсіздігін пайдаланып, $\forall x \in U(a),\quad x \neq a$ үшін $|f(x)| - |A| \leq |f(x) - A| < 1,$ бұдан $|f(x)| \leq 1 + |A|,\ \forall x \in U(a),\quad x \neq a$ аламыз. Мұнда $1 + |A| = M$ деп алсақ болғаны. ▲

3-теорема. Егер $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$ және қандай да бір $U(a),\quad x \neq a$ аймағындағы x-тер үшін $f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$ теңсіздіктері орындалса, онда $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A$.

▼ 4.3.2.п. 4-теоремасында тізбектер үшін бұл қасиет дәлелденген. Олай болса, функция шегінің 2-анықтамасы бойынша, бұл қасиет функциялар үшін де дұрыс. ▲

4-теорема. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x),\quad \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ ақырлы шектері бар болса, онда

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a}\varphi(x); \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot \varphi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a}\varphi(x); \qquad (2)$$

ал $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \neq 0$ болса, онда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}\ . \qquad (3)$$

▼ Бұл қасиеттер 4.3.2. пунктте тізбектер үшін келтірілген және қосындының шегі үшін аталған қасиет дәлелденген. Сондықтан функция шегінің 2-анықтамасына сәйкес бұл қасиет функция үшін де дұрыс. ▲

Салдар. $\lim C\varphi(x) = C\lim\varphi(x)$; C– тұрақты сан.

▼ 4-теоремада $f(x) = C$ деп алып, $\lim C = C$ екенін ескерсек болғаны. ▲

5-теорема (*шектерде айнымал ауыстыру*).

Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} F(y)$ шектері бар және $f(x) \neq b$ $(x \neq a)$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a} F[f(x)]$ шегі бар және келесі теңдік орын-далады: $\lim\limits_{x\to a} F[f(x)] = \lim\limits_{y\to b} F(y)$.

Мысалы. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2+2x} = \lim\limits_{y\to 3} e^y$, өйткені $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 + 2x\right) = 3$.

Енді $y = f(x)$ функциясы a нүктесінің белгілі бір $U(a)$ маңайында анықталған болсын (оның a нүктесінде анықталуы туралы шарт қойылмайды).

6-теорема (*шектің бар болуының Коши критерийі*). $y = f(x)$ функциясының $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ нақты шегі болуы үшін, берілген әрбір $\varepsilon > 0$ саны бойынша

$$0 < |x' - a| < \delta \quad \text{және} \quad 0 < |x'' - a| < \delta$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын кез келген x', x'' сандары үшін

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon) > 0$ санының **табылуы** қажетті және жеткілікті.

4.4.3. Ақырсыз кішкене және ақырсыз үлкен функциялар.

Осы пункттегі қарастырылатын функциялар a нүктесінің белгілі бір $U(a)$ маңайында анықталған деп ұғу керек (функция a нүктенің өзінде анықталуы міндетті емес).

Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *болса, онда* $x\to a$ *ұмтылғанда* $f(x)$ ***функция-сы ақырсыз кішкене*** *(а.к.) деп аталады.*

1-теорема. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ теңдігі орындалуы үшін $f(x)=A+\alpha(x)$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті (мұндағы $\alpha(x)$ шама x-айнымал a-ға ұмтылғанда ақырсыз кішкене функция). Басқаша айтқанда, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=A+\alpha(x), \quad \alpha(x)\to 0 \ \left(x\to a\right). \qquad (1)$$

▼ Шынында да, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ орындалса, онда $\alpha(x)=f(x)-A$ деп белгілеп, $f(x)=A+\alpha(x)$ және $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-A\right]=$ $=\lim\limits_{x\to a} f(x)-A=A-A=0$ теңдіктерін аламыз. Олардың соңғысы $x\to a$, $\alpha(x)$ а.к. екенін көрсетеді.

Керісінше, егер $f(x)=A+\alpha(x)$, $\alpha(x)\to 0$ $x\to a$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\left[A+\alpha(x)\right]=A+\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=A$ аламыз. ▲

2-теорема. Егер $x\to a$ ұмтылғанда $\alpha_1(x),\alpha_2(x),...,\alpha_n(x)$ ақырсыз кішкене функциялар болса, онда олардың ***қосындысы да, көбейтіндісі*** **де (** $x\to a$ ұмтылғанда) ***ақырсыз кішкене функция.***

▼ Теореманың дұрыстығы функция шегінің қасиеттерінен шығады (4.4.2.п. 4-теорема). ▲

3-теорема. $x\to a$ ұмтылғанда ақырсыз кішкене функция мен осы a нүктесінің қандай да бір маңайында шенелген функциялардың көбейтіндісі $x\to a$ ұмтылғанда ақырсыз кішкене функция.

▼ a нүктесінің $U(a)$ маңайында $f(x)$ шенелген, яғни $\forall x\in U(a)$, $\left|f(x)\right|\le C$ және $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ болсын. Онда $\forall\varepsilon>0$ саны берілсе, $0<\left|x-a\right|<\delta(\varepsilon)$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық x

үшін $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{C}$ теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылады. Сондықтан кез келген $\forall x : 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ нүктелері үшін $|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$ аламыз, яғни $\alpha(x) \cdot f(x)$ – ақырсыз кішкене функция. ▲

Мысалы, $f(x) = \sin\left(x^2 + \dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ $(x \ne 0)$ функциясы шенелген, ал $x \to 0$, $\varphi(x) = x^3$ – ақырсыз кішкене функция. Сондықтан 3-теорема бойынша, $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \cdot \sin\left(x^2 + \dfrac{e^x - 1}{x}\right) = 0.$

Ақырсыз үлкен функциялардың $\varepsilon, \delta -$тіліндегі анықтамасы.

Анықтама. Егер әрбір $\varepsilon > 0$ саны бойынша $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын x нүктелері үшін $|f(x)| > \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $\delta_\varepsilon > 0$ саны **табылса**, онда $f(x)$ функциясы $x \to a$ ұмтылғанда **ақырсыз үлкен функция** немесе қысқаша $x \to a$ ұмтылғанда **ақырсыз үлкен** деп аталады да,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{немесе} \quad f(x) \to \infty \ (x \to a)$$

символдарының бірімен белгіленеді.

Ескерту: Егер $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ және a нүктесінің белгілі бір маңайында $f(x) > 0$ немесе $f(x) < 0$ болса, онда сәйкес $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ деп жазады және f функциясының $x = a$ нүктедегі шегі сәйкес $+\infty$, $-\infty$ тең дейді. Ал $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ болса, онда ***функцияның шегі жоқ***, бірақ ол $x \to a$ ұмтылғанда ақырсыз үлкен.

Мысалы, $x \to 0$ ұмтылғанда $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясының шегі жоқ, бірақ ол ақырсыз үлкен. Өйткені әрбір $\varepsilon > 0$ саны арқылы $0 < |x| < \delta$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын x үшін $\left|\frac{1}{x}\right| > \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon)$ **табылады**. Расында да, $\left|\frac{1}{x}\right| > \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\varepsilon},\ x \neq 0$ қатысы орындалатындықтан $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ деп алсақ, онда $0 < |x| < \delta$ үшін $\left|\frac{1}{x}\right| > \varepsilon$ болады.

4-теорема. Егер $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \varepsilon,\ |\varepsilon| \neq 0$ және $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$ $\left(\varphi(x) \neq 0, x \neq a\right)$ болса, онда $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \varphi(x) = \infty$.

Дербес жағдайда, екі ақырсыз үлкен шамалардың көбейтіндісі ($\infty \cdot \infty$) немесе ақырсыз үлкен шама мен шегі нөлге тең емес функцияның көбейтіндісі ($\infty \cdot \lim f(x),\ \ \lim f(x) \neq 0$) – ақырсыз үлкен функция болады: $\infty \cdot \infty = \infty;\quad \infty \cdot K = \infty,\quad K \neq 0$.

Мысалы, $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot arctgx = +\infty,$ өйткені $\lim\limits_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} \neq 0$ және $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty.$

5-теорема. Егер кез келген $x \neq a$ үшін $\varphi(x) \neq 0$ болса, онда

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty; \tag{2}$$

және

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = 0. \tag{2^*}$$

(4) және (5) теоремалардан келесі қорытынды шығады.

Салдар. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\varepsilon,\quad |\varepsilon|\neq 0$ және $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0,$ онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty.$

Мысалы, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\infty.$

Ақырлы шегі бар функцияларға тән қасиеттер ақырсыз үлкен функциялар үшін орындала бермейді. Бірақ ***кейбір аналогиялар орын алатыны*** келесі теоремадан көрінеді.

6-теорема. $x\to a$ ұмтылғанда бірдей таңбалы ақырсыз үлкен функциялардың қосындысы (осы таңбамен алынған) ақырсыз үлкен функция болады. Басқаша айтқанда, егер $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=+\infty,$ $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=+\infty$ немесе $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=-\infty,$ $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=-\infty$ болса, онда

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x). \qquad (3)$$

(3) теңдікті оңнан солға қарай жазсақ, келесі ***символдық теңдіктер*** шығады: $(+\infty)+(+\infty)=+\infty,\quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$

▼ Теңдіктердің біріншісін дәлелдейік (екіншісі осы сияқты дәлелденеді):

Егер $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=+\infty$ болса, онда

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1(\varepsilon),\ \forall x:0<|x-a|<\delta_1(\varepsilon)\ \Rightarrow\ f_1(x)>\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\ \delta_2(\varepsilon),\ \forall x:0<|x-a|<\delta_2(\varepsilon)\ \Rightarrow\ f_2(x)>\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ал $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ деп алсақ, онда

$$\forall x:0<|x-a|<\delta\Rightarrow f_1(x)+f_2(x)>\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

яғни $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=+\infty$ аламыз. ▲

7-теорема. $x \to a$ ұмтылғанда ақырсыз үлкен функция мен a нүктесінің маңайында шенелген функция қосындысы $x \to a$ ұмтылғанда ақырсыз үлкен функция болады.

▼ Бұл да 6-теорема сияқты дәлелденеді. ▲

Мысалы, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+7\cos x\right)=\infty,$ өйткені $x \to \infty$ ұмтылғанда $f(x)=x$ – ақырсыз үлкен функция, ал $7\cos x$ – шенелген функция.

Ескерту. 4-7 теоремалардан біз анықтама етіп қабылдаған (4.1.4.п. қараңыз) $\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty;$ $\left(-\infty\right)\cdot\left(-\infty\right)=+\infty;$ $\left(+\infty\right)+\left(+\infty\right)=+\infty;$ $\left(-\infty\right)+\left(-\infty\right)=-\infty;$ $a>0$ болса: $a\cdot\left(+\infty\right)=+\infty;$ $a\cdot\left(-\infty\right)=-\infty$, т.с.с. символдық теңдіктердің шығатынын көреміз.

§ 4.5. Функциялардың үзіліссіздігі

Анықтама. *Егер* $y=f(x)$ *функциясы:*

1) x_0 *нүктесінде анықталған;*

2) x_0 *нүктесінің қандай да бір* $U_\delta(x_0)$ *маңайында анықталған;*

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ (1)

*теңдігі орындалса, онда **функция*** x_0 ***нүктесінде үзіліссіз*** *деп аталады.*

Бұл анықтаманы кванторларды пайдаланып жазуға болады:

($f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз) $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0:\forall x\in U_\delta(x_0)\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon.)$.

(1) теңдікті

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) \qquad (1')$$

деп те жазуға болады. Бұдан, егер функция үзіліссіз болса, онда функция астына шекке өтуге болатынын, басқаша айтқанда, үзіліссіз функция мен шек таңбаларын өзара орын ауыстыруға болатынын көреміз.

Мысалы, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x=\sin\frac{\pi}{2}=1$ ($\sin x$ функциясының кез келген $x\in R$ нүктесінде үзіліссіз болатыны төменде көрсетіледі).

Анықтама. *Егер $y=f(x)$ функциясы:*

1) x_0 *нүктесінде анықталған;*

2) x_0 *нүктесінің белгілі бір $U_\delta^+(x_0=(x_0,x_0+\delta)$ оң жақ маңайында ($U_\delta^-(x_0=(x_0-\delta,x_0))$ сол жақ маңайында) анықталған;*

3) $\lim\limits_{x\to x_o+}f(x)=f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_o-}f(x)=f(x_0)\right)$ *теңдігі орындалса, онда f функциясы x_0 **нүктесінің оң жағында (сол жағында) үзіліссіз функция** деп аталады.*

$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіз болуы үшін, оның x_0 нүктесінің оң жағында да, сол жағында да үзіліссіз болуы қажетті және жеткілікті:

$$\lim_{x\to x_o+}f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_o-}f(x). \qquad (*)$$

Алдымызда $h=(x_0+h)-x_0=\Delta x(h)$ санын **аргументтің** x_0 **нүктесіндегі өсімшесі**, ал $\Delta f(x_0;\,h)=f(x_0+h)-f(x_0)=$ $=f(x_0+\Delta x(h))-f(x_0)$ санын, h өсімшесі тудырған (немесе h өсімшеге сәйкес) функцияның x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп атаймыз. ***Мұнда аталған өсімшелердің h санына тәуелділігіне байланысты олар*** $\Delta x(h)$ ***және*** $\Delta f(x_0;\,h)$ ***арқылы белгіленді. Бірақ біз жиі қолданылып жүрген*** Δx ***және*** $\Delta f(x_0)$ ***символдарын пайдаланамыз.***

$f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіз болу анықтамасын келесі түрлерде де жазады (төменде $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$)

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0, \qquad (2)$$

$$\lim_{h\to 0}\left[f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)\right]=0, \qquad (3)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0, \qquad (4)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \qquad (5)$$

1-мысал. $y=C$ (C – тұрақты) – кез-келген x нүктесінде үзіліссіз функция.

▼ Шынында да, $f(x)=C,\ f(x+h)=C$ болғандықтан, $\Delta y=f(x+h)-f(x)=C-C=0$ болады да, $\lim\limits_{h\to 0}\Delta y=\lim\limits_{h\to 0}0=0$ аламыз. Олай болса (5) бойынша $y=C$ функциясы кез келген x нүктесінде үзіліссіз. ▲

2-мысал. $y=\sin x$ – кез келген x нүктесінде үзіліссіз функция.

▼ Шынында да, ($\left|\sin\alpha\right|<\left|\alpha\right|,\forall\alpha\in R$ теңсіздігі төменде дәлелденеді), $\left|\Delta y\right|=\left|\sin(x+\Delta x)-\sin x\right|=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 2\cdot\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le$

$\le 2\cdot\frac{\left|\Delta x\right|}{2}=\left|\Delta x\right|$, яғни $\left|\Delta y\right|\le\left|\Delta x\right|$. Бұдан кез келген $\varepsilon>0$ саны берілсе,

$\left|\Delta x\right|<\delta$ үшін $\left|\Delta y\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай δ саны табылатынын көреміз (ол сан $\delta=\varepsilon$), яғни $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$ ▲

1-теорема (*монотонды функцияның үзіліссіздігі туралы*).

Егер $\left[a,b\right]$ кесіндісінде $y=f(x)$ монотонды және $\left[f(a),\ f(b)\right]$ кесіндісіндегі барлық мәндерді қабылдайтын функция болса, онда ол (a,b) аралығының әрбір нүктесінде үзіліссіз (a мен b нүктелерінің сәйкес оң және сол жақтарынан үзіліссіз).

Бұл теоремадан, барлық **негізгі элементар функциялардың өздерінің анықталу жиынының ішкі нүктелерінде үзіліссіз,** ал

анықталу жиынының шекаралық нүктелерінде бір жақты (оң, сол жақты) **үзіліссіз болатыны шығады.**

Мысалы, $y=\arcsin x$ функциясы (-1,1) аралығының барлық нүктелерінде үзіліссіз ($x=-1$ нүктесінде оң жағынан және $x=1$ нүктесінде сол жағынан үзіліссіз), ол $[-1,1]$ кесіндісінде монотонды өспелі және әрбір $y_0\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ үшін $\arcsin x_0=y_0$, $x_0=\sin y_0$ болатындай $x_0\in\left[-1,1\right]$ нүктесі табылады.

2-теорема. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары x_0 нүкте-сінде үзіліссіз болса, онда $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ функциялары, ал $g(x_0)\neq 0$ болса, онда $\frac{f(x)}{g(x)}$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болады.

▼ Дәлелдеуі (4.4.2.п. 4-теореманы пайдаланамыз):

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\ \pm g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)},\quad g(x_0)\neq 0\,. \qquad ▲$$

3-теорема (күрделі функцияның үзіліссіздігі). Егер $y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және $y_0=f(x_0)$, ал $z=g(y)$, y_0 нүктесінде үзіліссіз функция болса, онда $z=g\left[f(x)\right]$ күрделі функциясы, x_0 нүктесінде үзіліссіз болады.

▼ Кез келген $\varepsilon>0$ оң саны берілсін. Онда $g(y)$ функциясы

$y=y_0$ нүктесінде үзіліссіз болғандықтан, $\forall y:\left|y-y_0\right|<\sigma$ нүкте-лері үшін $\left|g(y)-g(y_0)\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $\sigma>0$ саны табылады. Сонымен бірге $f(x)$ функциясы $x = x_0$ нүктесінде үзіліссіз болғандықтан, $\sigma > 0$ саны берілсе $\forall x$: $|x - x_0| < \delta$ нүктелері үшін $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \sigma$ теңсіздігі орындалатындай $\delta > 0$ саны табылады. Одан соң табылған $\delta > 0$ саны бойынша

$$|g[f(x)] - g(y_0)| = |g[f(x)] - g[f(x_0)]| < \varepsilon$$

теңсіздігін аламыз. ▲

1-3-теоремалардан шығатын.

Салдар. ***Элементар функциялар өздерінің анықталу жиынында үзіліссіз болады.***

Олай болса берілген $f(x)$ элементар функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіз болатынын дәлелдеу үшін, x_0 нүктесінің осы функцияның анықталу жиынында жататынын көрсетсе болғаны.

Ескерту. Егер $x = a$ нүктесінде және оның қандай да бір маңайында кең мағынада анықталған f функциясының осы нүктеде шегі бар және $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ теңдігі орындалса, онда функция a нүктесінде ***кең мағынада үзіліссіз*** деп аталады.

Мысалы, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-3)^2}, & x \neq 3, \\ +\infty, & x = 3 \end{cases}$ функциясы $x = 3$ нүктесінде ***кең мағынада үзіліссіз***.

§ 4.6. Тамаша шектер

$\left(\dfrac{0}{0}\right)$ және $\left(1^{\infty}\right)$ түріндегі анықталмағандықтарды ашуға көбінесе келесі екі теңдік пайдаланылады:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (\textbf{\textit{бірінші тамаша шек}}). \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e \qquad (\textbf{\textit{екінші тамаша шек}}). \tag{2}$$

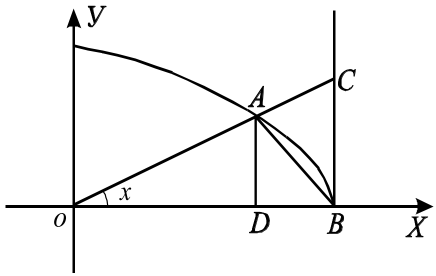
(1) теңдікті дәлелдейік.

▼ $x \to 0+$, яғни x айнымалы 0-ге оң жақтан ұмтылсын $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Центрлік бұрышы x радианға тең бірлік дөңгелекті қарастырайық (26-сурет). Бұл суреттен: $OA = OB = 1$, $BC = tgx$,

$OB \perp AД$, $AД = \sin x$, $S_{\Delta OAB} < S_{сек.OAB} < S_{\Delta OCB}$ екені көрінеді. $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}\sin x$, $S_{сект.OAB} = \dfrac{1}{2}x$, $S_{\Delta OCB} = \dfrac{1}{2}tgx$ өрнектерін соңғы қос теңсіздікке қойсақ, $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}tgx \Rightarrow \sin x < x < tgx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (3)$$



26-сурет

$\cos(-x)$ және $\dfrac{\sin x}{x}$ функциялары жұп болғандықтан,

$\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), x \neq 0$ нүктелері үшін $\cos(-x) = \cos x$, $\dfrac{\sin(-x)}{(-x)} = \dfrac{\sin x}{x}$ болады да, (3) қос теңсіздік, x нөлге сол жақтан ұмтылғанда да, яғни $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ нүктелері үшін де орындалады.

Олай болса келесі қатыстарды жазуға болады:

$$\forall x \neq 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Енді $\cos x$ функциясының кез келген x нүктесіндегі үзіліссіздігінен $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos\left(\lim\limits_{x\to 0} x\right) = 1$ орындалады. Демек, (4.4.2.п., 3-теорема бойынша) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ аламыз. ▲

Егер $x \to 0$ ұмтылғанда $\alpha(x) \to 0$ ұмтылса, онда ***бірінші тамаша шекті жалпы түрде*** жазуға болады

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1. \tag{4}$$

Енді (2) теңдікті дәлелдейік.

▼ Алдымен

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{5}$$

теңдігін дәлелдейік. Егер $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – оң бүтін сандардан құралған кез келген өспелі тізбек болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ теңдігінен (4.3.5.п., (7) қараңыз) келесі теңдікті аламыз:

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{6}$$

$\{x_k\}$ кез келген $+\infty$-қа ұмтылатын тізбек болсын.

Берілген x_k саны үшін $n_k \le x_k < n_k + 1$ орындалатындай **ең үлкен бүтін** n_k **санын** табуға болады. Онда

$$\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \le \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{x_k} \le \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

және

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \geq \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{x_k} \geq \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n_k+1}}$$

демек, барлық k үшін

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n_k+1}} \leq \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \leq \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

теңсіздіктері орындалады. Бұндағы екі шеткі өрнектің шегі e болады, өйткені $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n_k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = 1,$ және (6) бойынша

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Сондықтан 4.3.2 п. 4-теорема бойынша

$$\forall x_k \to +\infty \quad (k\to\infty), \quad \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e$$

аламыз. Гейне анықтамасы бойынша (5) теңдік дәлелденді.

Енді келесі теңдікті дәлелдейік

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \tag{7}$$

Егер $x_k \to -\infty \quad (k\to\infty)$ ұмтылатын кез келген тізбек болса, онда $y_k = -x_k \to +\infty \ (k\to\infty).$ Осы ауыстыруды ескеріп,

$$\left\{1+\frac{1}{x_k}\right\}^{x_k} = \left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k} = \left(\frac{1+y_k-1}{y_k-1}\right)^{(y_k-1)+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1} \cdot \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)$$ аламыз.

Ал $y_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$ ұмтылатындықтан, соңғы өрнектің бірінші көбейткішінің шегі (2) бойынша e-ге тең, ал екінші көбейткішінің шегі 1-ге тең. Олай болса кез келген $x_k \to -\infty$ $(k \to \infty)$ үшін $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e,$ аламыз. (7) теңдік дәлелденді.

(5) және (7) теңдіктерден

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \tag{8}$$

теңдігін аламыз. ▲

(8) теңдікте $\frac{1}{x} = t$ айнымал ауыстыруын қолдансақ

$$\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}} = e\ . \tag{9}$$

Егер $x \to \infty$ ұмтылғанда $\alpha(x) \to \infty$ ұмтылса ($t \to 0$ ұмтылғанда $\beta(x) \to 0$ ұмтылса), онда ***екінші тамаша шектерді*** келесі түрлерде ***жазуға болады***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e; \tag{10}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(1+\beta(t)\right)^{\frac{1}{\beta(t)}} = e. \tag{11}$$

1-салдар.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \qquad a>0, \qquad a\neq 1, \tag{12}$$

теңдігі орындалады. Дербес жағдайда $a=e$ болса

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{13}$$

▼ Шынында да, егер $\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ теңдігін, логарифмдік және күрделі функциялардың үзіліссіздігін, (2) теңдікті пайдалансақ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$ $=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$ аламыз. ▲

2-салдар. Келесі теңдік орындалады:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{14}$$

Дербес жағдайда егер $a=e$ болса, онда

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \tag{15}$$

теңдігі орындалады.

▼ $a^x-1=y$ айнымал ауыстыруынан $a^x=1+y,\ x=\log_a(1+y)$ және $x\to 0\ \Rightarrow\ y\to 0$ аламыз. Олай болса (12) теңдік бойынша

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\frac{1}{\frac{1}{\ln a}}=\ln a. \ ▲$$

Мысал. Есептеу керек: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+2}$;

▼ а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}==\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1\cdot\frac{2}{3}}{1}=\frac{2}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x+1}{2x+3}-1\right)^{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{2x+3}\right)^{3x+2}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2x+3}{-2}}\right)^{\frac{2x+3}{-2}\cdot\frac{-2}{2x+3}\cdot(3x+2)}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{2x+3}{-2}=y\\ y\to\infty\end{array}\right|=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(3x+2)}{2x+3}}=e^{-3}.$$

▲

Сонымен, егер $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}$ шегі үшін $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1,$ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ болса, онда оны (10) немесе (11) теңдіктерді пайдалануға болады.

§ 4.7. Ақырсыз кішкене және ақырсыз үлкен шамаларды салыстыру

a нүктесінің белгілі бір $U(a)$ маңайында анықталған $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функцияларын қарастырамыз (ол функциялардың *a* нүктесінде анықталуы міндетті емес), *a* нүктесі ақырлы (нақты) немесе ақырсыз ($+\infty,\ -\infty$ немесе ∞) болуы мүмкін.

Анықтама. *Егер*

$$\alpha(x)=\gamma(x)\cdot\beta(x),\quad x\in U(a),\ x\neq a\ \ \text{және}\ \lim_{x\to a}\gamma(x)=0 \qquad (1)$$

шарттары орындалатын $U(a)$ *маңайында анықталған* $\gamma(x)$ *функциясы табылса, онда* $x\to a$ ***ұмтылғанда*** $\alpha(x)$ ***функциясы*** $\beta(x)$ ***функциясымен салыстырғанда ақырсыз кішкене*** *деп атап,*

$$\alpha(x)=o(\beta(x)),\quad x\to a, \qquad (2)$$

арқылы белгілейміз. Соңғы теңдікті былай оқимыз: «$x\to a$ ***ұмтылғанда,*** $\alpha(x)$ ***тең кіші о*** $\beta(x)$» немесе «*a* ***нүктесінде*** $\alpha(x)$ ***функциясы*** $\beta(x)$ ***функциясымен салыстырғанда кіші о»*** .

Егер $\forall x \in U(a)$ нүктелерінде $\beta(x) \neq 0$ болса, онда

$$(1) \text{ шарт } \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0. \qquad (1')$$

Дербес жағдайда егер $\beta(x) \equiv 1$ болса, онд**а** $\alpha(x) = o(1)$ белгілеуі $x \to a$ ұмтылғанда, $\alpha(x)$ функциясы ақырсыз кішкене шама екенін көрсетеді: мысалы, $\frac{1}{\ln x} = o(1)$, $x \to +\infty$.

Егер $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to a$, қатысындағы $\beta(x)$ ақырсыз кішкене, яғни $\lim_{x \to a} \beta(x) = 0$ болса, онда $x \to a$ ***ұмтылғанда*** $\alpha(x)$ ***функциясы*** $\beta(x)$ ***функциясымен салыстырғанда реті жоғары ақырсыз кішкене шама*** деп аталады.

Ал $\alpha(x), \beta(x)$ функциялары $x \to a$ ұмтылғанда, ақырсыз үлкен, яғни $\lim_{x \to a} \alpha(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty$ болса, онда $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to a$ жазуы: $x \to a$ ***ұмтылғанда,*** $\alpha(x)$ ***функциясы*** $\beta(x)$ ***функциясымен салыстырғанда реті төмен ақырсыз үлкен шама*** деп аталады.

Мысалы,

1) $x^3 = o(x)$, $x \to 0$, өйткені $x^3 = x^2 \cdot x$, $x^2 \to 0$ $(x \to 0)$;

2) Егер $n > m$ болса, онда $x^n = o(x^m)$, $x \to 0$, бірақ $x^m = o(x^n)$, $x \to \infty$;

3) $1 - \cos x = o(x)$, $x \to 0$, өйткені

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 0 \cdot 1 = 0.$$

Егер $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ шамалары $x \to a$ ұмтылғанда ақырсыз кішкене және

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad C \neq 0 \qquad (3)$$

теңдігі орындалса, онда олар $x \to a$ ұмтылғанда, **реттері бірдей ақырсыз кішкене** деп аталады; ал егер (3) теңдікте C=1 **болса, онда** $x \to a$ **ұмтылғанда,** $\alpha(x)$ **функциясы** $\beta(x)$**-ке эквивалентті (асимптоталық тең)** деп аталады да, келесі түрде белгіленеді:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \ \ x \to a \ \text{ немесе } \ \alpha(x) \approx \beta(x), \ \ x \to a. \qquad (4)$$

Мысалы,

$$\sin x \sim x, \quad x \to 0; \qquad (5)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \ \ x \to 0; \qquad (6)$$

$$\ln(1+x) \sim x, \ \ x \to 0; \qquad (7)$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad x \to 0; \qquad (8)$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \to 0; \qquad (9)$$

$$\arcsin x \sim x, \quad x \to 0; \qquad (10)$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \to 0; \qquad (11)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad x \to 0. \qquad (12)$$

Егер $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ болса, онда (5)–(12) қатыстарын сәйкес

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x), \quad x \to a \qquad (5')$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}, \quad x \to a \qquad (6')$$

және с.с. қатыстарымен ауыстыруға болады.

▼ Шынында да, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \begin{vmatrix} \alpha(x) = y \\ x \to a \Rightarrow y \to 0 \end{vmatrix} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1;$

Осы сияқты айнымал ауыстыруын жасай отырып, (6′) қатысты да алуға болады

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \cos \alpha(x)}{\dfrac{\alpha^2(x)}{2}} = \begin{vmatrix} \alpha(x) = y \\ x \to a, y \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{\dfrac{y^2}{2}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{\frac{y^2}{2}} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2 = 1$$

(7)-(12) қатыстарын ($5'$) және ($6'$) түрінде өздеріңіз жазып көріңіздер. ▲

Эквиваленттік қатыс үшін келесі үш қасиет орындалатынын атап өтеміз:

1°. $\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad x\to a$;

2°. $\alpha(x)\sim\beta(x),\quad x\to a \Rightarrow \beta(x)\sim\alpha(x), x\to a$;

3°. Егер $\alpha(x)\sim\beta(x),\quad x\to a$ және $\beta(x)\sim\gamma(x), x\to a,$

онда $\alpha(x)\sim\gamma(x), x\to a.$

Теорема. Егер $\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\quad x\to a,$ болса, онда

$$\lim_{x\to a}\left[\beta(x)\cdot\alpha(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[\beta(x)\cdot\alpha_1(x)\right], \tag{13}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha_1(x)}. \tag{14}$$

Мұндағы теңдіктердің екі жағындағы шектер бір мезгілде бар.

▼ $$\lim_{x\to a}\left[\beta(x)\alpha(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[\beta(x)\cdot\alpha_1(x)\cdot\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[\beta(x)\alpha_1(x)\right]\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\beta(x)\cdot\alpha_1(x)\right]\cdot 1 = \lim_{x\to a}\left[\beta(x)\cdot\alpha_1(x)\right].$$

(14) теңдік те осылай дәлелденеді. ▲

Мысалдар.

▼ 1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3+x} = \left|\begin{array}{l}\sin x\sim x,\\ x\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x\cdot\left(\sqrt{1+2x}-1\right)}{\ln(1+3x)\cdot\sin 5x} = \left|\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x\sim x, x\to 0,\\ (1+2x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot 2x,\ x\to 0\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x}{3x \cdot 5x} = \frac{1}{15}. \qquad \blacktriangle$$

Ескерту. Егер

$$\forall x \in U(a), \quad |\alpha(x)| \le C \cdot |\beta(x)|, \text{ (С – х-ке тәуелсіз оң сан)} \qquad (15)$$

теңсіздігі орындалса, онда $x \to a$ **ұмтылғанда,** $\alpha(x)$ **функциясы** $\beta(x)$ **– ретті** дейді. Бұл тұжырымды

$$\alpha(x) = O\big(\beta(x)\big), \quad x \to a \qquad (16)$$

арқылы белгілеп, $x \to a$ **ұмтылғанда,** $\alpha(x)$ **тең** $\beta(x)$ **-тен үлкен О** деп оқиды.

Мысалы, 1) $\sin x = O(1), \ x \to \infty$, өйткені $|\sin x| \le 1, \quad \forall x \in R,$

2) $x + x^2 = O(x^2), \quad x \to \infty$, өйткені $x \to \infty, \ |x| \le |x|^2$ орындалғандықтан, $|x + x^2| \le |x| + |x^2| \le |x|^2 + |x|^2 = 2|x|^2$ $(C = 2)$ аламыз.

3) $x + x^2 = O(x), \quad x \to 0,$ өйткені $x \to 0, \ |x|^2 < |x|$ орындалғандықтан, $|x + x^2| \le |x| + |x^2| \le |x| + |x| = 2 \cdot |x|$ $(C = 2)$ аламыз.

«O» және «o» ***Ландау символдары*** деп аталады.

§ 4.8. Үзіліс нүктелері және олардың түрлері

Біз жоғарыда *f* функциясы $x = a$ нүктесінде және оның белгілі бір $U(a)$ маңайында анықталған және $f(a+)$ мен $f(a-)$ шектері бар әрі

$$f(a) = f(a+) = f(a-) \qquad (1)$$

теңдіктері орындалса, онда *f*-ті $x = a$ нүктесінде үзіліссіз функция деп атаған едік (§4.5 қараңыз).

Егер $f(a+)$, $f(a-)$ ақырлы шектері бар, бірақ (1) теңдіктердің ең болмағанда біреуі орындалмаса, онда $x = a$ – функцияның **бірінші текті үзіліс нүктесі** деп аталады.

27-32-суреттерде $x = a$ нүктесінде бірінші текті үзілісті функцияның алты түрі көрсетілген. A әрпі функцияның $(a, f(a))$ нүктесін көрсетеді. Жебе ұшындағы нүкте оның графиктен алынып тасталғанын білдіреді.

30-суретте $f(a+) = f(a-) \neq f(a)$;

32-суретте $f(a+0) = f(a-0)$, бірақ $f(a)$ анықталмаған.

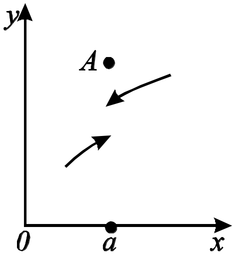
Егер осы аталған екі жағдайдың бірі орындалса, онда $x = a$ ***жөнделетін үзіліс нүктесі деп аталады.*** Өйткені функцияның $x = a$ нүктесіндегі түрін $f(a) = f(a+) == f(a-)$ теңдіктері орындалатындай етіп өзгертсек (жеткізе анықтасақ), онда функция $x = a$ нүктесінде үзіліссіз болады, яғни «жөнделеді».

1-мысал. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ функциясының $x = 0$ нүктесінде ***жөнделетін үзіліс нүктесі*** бар. Егер бұл функцияны $x = 0$ нүктесінде $f(0) = 1$ деп жеткізе анықтасақ, яғни $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ деп алсақ, онда $\tilde{f}(x)$ кез келген нүктеде үзіліссіз функция болады (33-сурет).

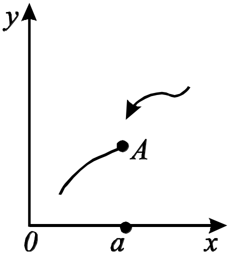
2-мысал. $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ функциясы үшін $x = 0$ - бірінші текті үзіліс нүктесі: $\operatorname{sign}(0+) = 1, \operatorname{sign}(0-) = -1$, $\operatorname{sign}(0+) \neq \operatorname{sign}(0-)$ (34-сурет).

Егер біржақты $f(a+)$, $f(a-)$ ***шектерінің ең болмағанда біреуі жоқ*** немесе олардың ***ең болмағанда біреуі ақырсыз*** және $f(a+) \neq f(a-)$ болса, онда $x = a$ ***– функцияның екінші текті үзіліс нүктесі*** деп аталады.

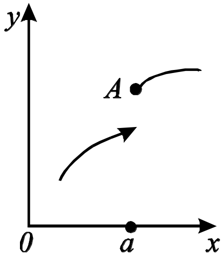
3-мысал. $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, \qquad x=0\end{cases}$ функциясы үшін, $x=0$ – екінші текті үзіліс нүктесі. Өйткені $x=0$ нүктесінде функцияның біржақты шектері жоқ (4.4.1.п., 4-мысал) (35-суретті қараңыз).



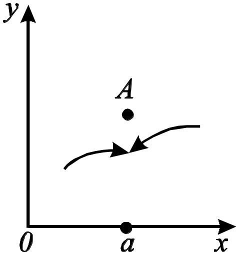
27-сурет



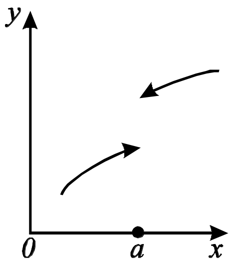
28-сурет



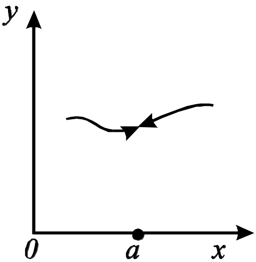
29-сурет



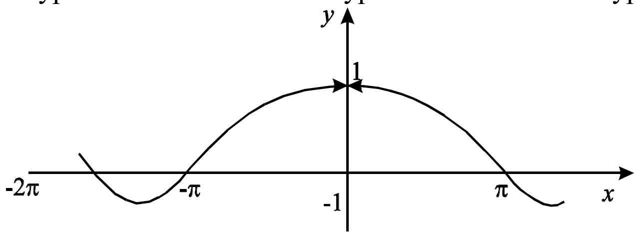
30-сурет



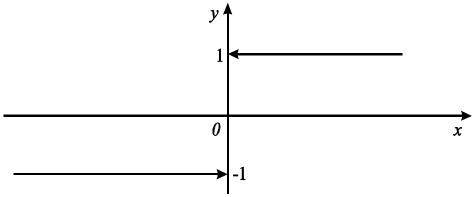
31-сурет



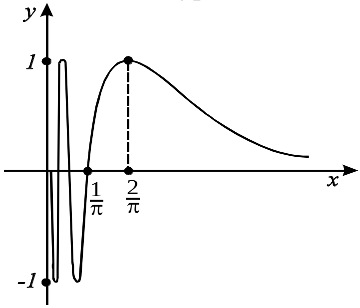
32-сурет



33-сурет

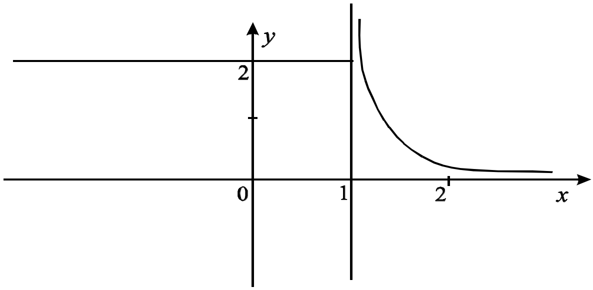


34-сурет



35-сурет

4-мысал. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x>1\\ 2, & x\le 1\end{cases}$ функциясы үшін $x=1$ – екінші текті үзіліс нүктесі, өйткені $f(1+)=+\infty$, $f(1-)=2$ (36-сурет).



36-сурет

5-мысал. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-3}, & x\neq 3,\\ -\infty, & x=3\end{cases}$ функциясы үшін, $x=3$- екінші текті үзіліс нүкте;

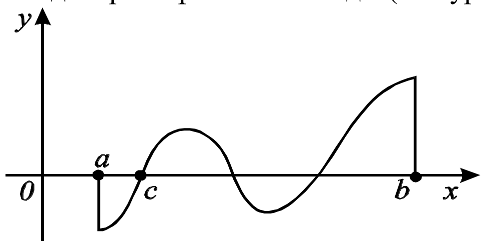
6-мысал. $g(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ функциясы үшін $x=3$ – ***жөнделетін үзіліс нүкте***, өйткені, $\overline{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-3)^2}, & x\neq 3,\\ +\infty, & x=3\end{cases}$ функциясы $x=3$ нүктеде кең мағынада үзіліссіз.

§ 4.9. Кесіндіде үзіліссіз функциялардың қасиеттері

Егер f **функциясы** (a,b) аралығының барлық нүктелерінде (кең мағынада) үзіліссіз, ал a нүктесінің оң жағынан және b нүктесінің сол жағынан (кең мағынада) үзіліссіз болса, онда **ол** $[a,b]$ **кесіндісінде (кең мағынада) үзіліссіз** деп аталады.

Алдымен келесі ***Больцано-Коши теоремаларын*** қарасты-райық (1-теорема мен салдар туралы айтылып отыр).

1-теорема. Егер f функциясы $[a,b]$ кесіндісінде *кең мағынада* үзіліссіз және $f(a)\cdot f(b)<0$, яғни $f(a)$ мен $f(b)$ мәндерінің таңбалары әртүрлі болса, онда $f(c)=0$ теңдігі орындалатындай (a,b) аралығынан кем дегенде бір c нүктесі табылады (37-сурет).



37-сурет

▼ Анықтылық үшін $f(a) > 0,\ \ f(b) < 0$ деп алайық. $d_1 = \dfrac{a+b}{2}$ нүктесі $[a,b]$ кесіндісінің ортасы. Егер $f(d_1) = 0$ болса, онда теорема дәлелденді. Егер $f(d_1) > 0$ болса, онда $[d_1, b] = [a_1, b_1]$ деп, ал $f(d_1) < 0$ болса, онда $\left[a, d_1\right] = \left[a_1, b_1\right]$ деп белгілейміз. Бұл екі жағдайда да $f(a_1) > 0,\ \ f(b_1) < 0$ болады. Әрі қарай $[a_1, b_1]$ кесіндісін қақ бөліп, алдыңғыдағыдай $[a_2, b_2]$ кесіндісін құраймыз, сөйтіп процесс т.с.с. қайталана береді. Егер $f(d_k) \neq 0, k = 1, 2, ...$ болса, онда $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ және $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ екі тізбек аламыз. $\left\{a_n\right\}$ тізбегі монотонды өспелі және жоғарыдан b санымен шенелген, ал $\{b_n\}$ монотонды кемімелі және төменнен a санымен шенелген. Олай болса, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c_1$ және $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c_2$. Ал, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ болатындықтан, $c_1 = c_2 = c$ болады. Мына теңсіздіктерді: $\forall n = 1, 2, ...\ \ f(a_n) > 0,\ \ f(b_n) < 0$ және f функциясының $[a,b]$ кесіндісінде (кең мағынада) үзіліссіз екенін пайдалансақ, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \geq 0,\ \ \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \leq 0,$ ал бұл екі теңсіздіктен $f(c) = 0$ аламыз. ▲

Бұл дәлелдеу $f(x) = 0$ теңдеуінің *“қақ бөлу әдісі”* деп аталатын жуықтап шешу алгоритмін береді.

1-мысал. $x - \cos x = 0$ теңдеуінің $(0, \pi)$ аралығында кем дегенде бір түбірі бар. Шынында да, $f(x) = x - \cos x$ функциясы $[0, \pi]$ кесіндісінде үзіліссіз және $f(0) = -1 < 0,\ \ f(\pi) = \pi + 1 > 0$.

2-мысал. $y = \dfrac{1}{x}$ функциясы үшін $[-1,\ 1]$ кесіндісінде $f(-1) = -1 < 0,\ \ f(1) = 1,$ яғни $f(-1) \cdot f(1) < 0$ шарты орындал-ғанмен, функция нөлге тең болатындай бірде бір x нүктесі жоқ. Өйткені, мұнда 0 - функцияның үзіліс нүктесі, яғни 1-теорема шарты орындалмаған.

Салдар. Егер f функциясы $[a,b]$ кесіндісінде кең мағынада үзіліссіз болса, онда функцияның *кез келген екі мәнінің арасында жатқан нақты сан да* осы функцияның мәні болады.

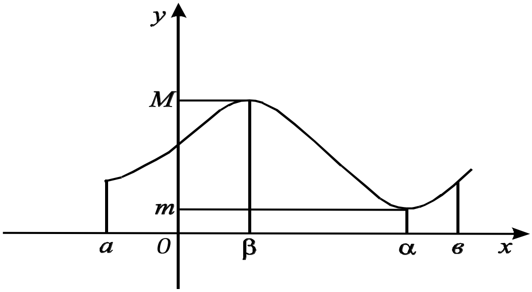
Мысалы, $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болатын функция $[f(a), f(b)]$ кесіндісіндегі барлық мәндерді қабылдайды.

▼ Айталық, $f(a)=A,\quad f(b)=B,\quad A<B$, ал C осы $(A;B)$ аралығындағы ($A<C<B$) кез келген сан болсын. Онда $F(x)=f(x)-C$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз (неге?) және $F(a)=f(a)-C<0,\quad F(b)=f(b)-C>0$ болады. Олай болса, 1-теорема бойынша $F(c)=f(c)-C=0$ орындалатындай $c\in(a,b)$ нүктесі табылады. Бұл теңдіктен $f(c)=C$ болатындай $c\in(a,b)$ бар екенін көреміз. ▲

2-теорема. (Вейерштрасстың бірінші теоремасы). Егер f функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол $[a,b]$ кесіндісінде шенелген, яғни $\forall x\in[a,b],\ |f(x)|\le K$ теңсіздігі орындалатындай $K>0$ саны табылады.

Мысал. $y=\dfrac{1}{x}$ функциясы $(0,1)$ аралығында үзіліссіз, бірақ шенелмеген, өйткені $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. Бұдан функцияның үзіліссіздігінің **кесіндіде** орындалуы маңызды шарт екенін көреміз.

3-теорема. **(Вейерштрасстың екінші теоремасы).** Егер f функциясы $[a,b]$ кесіндісінде анықталған және үзіліссіз болса, онда оның $[a,b]$ кесіндісінде ең үлкен және ең кіші мәндері бар болады, яғни $\forall x\in[a,b],\ f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$ орындалатындай $\alpha,\beta\in[a,b]$ нүктелері табылады: $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(\alpha),\ \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(\beta)$.



38-сурет

Мысал. $f(x)=x$ функциясы (a,b) аралығында үзіліссіз, шенелген $\left(\sup\limits_{x\in(a,b)} x=b,\ \inf\limits_{x\in(a,b)} x=a\right)$, бірақ ең үлкен де, ең кіші де мәндері жоқ $\left(\bar{\exists}\max\limits_{x\in(a,b)} x,\ \bar{\exists}\min\limits_{x\in(a,b)} x\right)$.

Ескерту. Вейерштрасстың бірінші теоремасы – екінші теоремасының салдары, өйткені ең үлкен және ең кіші элементтері бар сандар жиыны осы екі санмен сәйкес жоғарыдан және төменнен шенелген (38-сурет).

$y=f(x)$ *функциясы* X *жиынында анықталған болсын.*

Анықтама. *Егер әрбір* $\varepsilon>0$ *саны арқылы* $|x-y|<\delta(\varepsilon)$ *теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген* $x,y\in X$ *сандары үшін* $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ *теңсіздігі орындалатындай* $\delta(\varepsilon)>0$ *саны табылса, онда* f *функциясын* X ***жиынында бірқалыпты үзіліссіз функция*** *дейді.*

Ескерту. 1) Үзіліссіздік анықтамасы бір нүкте үшін тұжырымдалады. Ал бірқалыпты үзіліссіздік анықтамасы жиын нүктелері үшін тұжырымдалады, яғни *функция нүктеде бірқалыпты үзіліссіз деп айтылмайды*;

2) егер f функциясы X жиынында бірқалыпты үзіліссіз болса, онда ол осы жиында (яғни жиынның әрбір нүктесінде) үзіліссіз болады. Ал кері тұжырым келесі теорема шарты орындалса ғана дұрыс.

4-теорема (Кантор). Егер f функциясы $[a,b]$ кесіндісінде анықталған және үзіліссіз болса, онда f осы кесіндіде бірқалыпты үзіліссіз.

▼ **Мысалы,** $y=\sin\frac{1}{x}$ функциясы (0,1] жартылай аралығында үзіліссіз, бірақ ол мұнда бірқалыпты үзіліссіз емес, өйткені $x_k=\frac{2}{\pi(2k+1)}\in(0,1],\quad k=0,1,2,...$ және кез келген $\delta>0$ үшін

$$\left|x_{k+1}-x_k\right|=\frac{4}{\pi(2k+3)(2k+1)}<\delta$$

теңсіздігі орындалатындай k санын табуға болады. Бірақ, егер $\varepsilon=1$ саны берілсе, онда

$$\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|=\left|\sin\frac{\pi(2k+3)}{2}-\sin\frac{\pi(2k+1)}{2}\right|= \\ =\left|(-1)^{k+1}-(-1)^k\right|=2>\varepsilon=1.$$ ▲

4-тарау. Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Жиындарды, жиынның элементтерін, бос жиынды қалай белгілейді? Ішжиын, тең жиындар деген не және олар қалай белгіленеді? Жиындарға жасалатын амалдардың анықтамаларын тұжырымдаңыз. Мысалдар келтіріңіз.
2. Жиындарға жасалатын амалдардың қасиеттерін, де Морган заңдарын жазыңыз. Оларды дәлелдеңіз.
3. Мына логикалық символдар арқылы: $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\rceil$ қандай айтылымдар белгіленеді? Мына логикалық кванторлар: $\forall$, $\exists$ – қалай қолданылады? Мысалдар келтіріңіз.

4. Интервалдар, нүктенің ε-маңайы туралы ұғымдарды және $+\infty$, $-\infty$, ∞ символдары арқылы нені белгілейтінін түсін-діріңіз. Ақырсыз $+\infty$, $-\infty$, ∞ сандарының ε-маңайларын жазып көрсетіңіз.
5. Шенелген жиын ұғымын анықтаңыз және мысалдар келтіріңіз.
6. Супремум (*supX*) және инфимум (*inf X*) ұғымдарының мәнін ашыңыз. Мысалдар келтіріңіз.
7. Функцияның анықтамасын келтіріңіз. Функцияның анық-талу аймағы, өзгеру аймағы деген не? Функцияны берудің негізгі тәсілдерін атаңыз. Мысал келтіріңіз.
8. Кері функция, күрделі функция ұғымдарының мәнін ашыңыз. Мысалдар келтіріңіз.
9. Жұп (тақ) функция, периодты функция, монотонды функция деген не? Мысал келтіріңіз.
10. **Негізгі элементар функцияларды** және олардың қасиеттерін атап көрсетіңіз. **Элементар функция** деген не? Мысал келтіріңіз.
11. Сандар тізбегі деген не? Мысал келтіріңіз. Сандар тіз-бегінің анықтамасы бойынша $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,\ \ |q|<1$ теңдіктерін дәлелдеңіздер.
12. «Сандар тізбегінің шегі жоқ» дегенді қалай түсінесіз? Мысал келтіріңіз.
13. Шегі бар сандық тізбектердің қасиеттерін тұжырымдаңыз.
14. Ақырсыз кішкене, ақырсыз үлкен шамалар және оларға қатысты қасиеттер туралы не білесіз?
15. Анықталмаған өрнектердің түрлерін көрсетіңіз. Анықталмаған өрнекті ашуға арналған мысал келтіріңіз.
16. Шенелген монотонды тізбек туралы теореманы пайдаланып,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,\ \ a\in R;\ \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0;\ \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & |q|<1;\\ \infty, & |q|>1\end{cases}$$ теңдіктерін дәлелдеңіз.

17. Келесі қатыстардың мағынасын түсіндіріңіз:

$\ln\ n\ \le n^{\alpha}\le a^n\le n!\le n^n,\quad n>n_0>0$, мұнда $\alpha>0,\ \ |a|>1.$

18. Теңдікті дәлелдеңіз: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=e.$ Мысал келтіріңіз.
19. Фундаментальды (Коши) тізбегі; іштізбек; жоғарғы (төменгі) шектер туралы не білесіз және оларға арналған қасиеттерді атаңыз.
20. Функцияның $x=a$ нүктедегі және ақырсыз $a=\infty$ нүктедегі шегінің анықтамаларын, сонымен бірге функцияның осы нүктелердегі біржақты шектерінің анықтамаларын келтіріңіз.
21. Функция шегі мен оның біржақты шектерінің арасындағы байланысты көрсетіңіз. Функциялардың шектері туралы негізгі теоремаларды дәлелдеңіз.
22. Ақырсыз кішкене және ақырсыз үлкен шамалар деген не және олардың қандай негізгі қасиеттерін білесіз?
23. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің, біржақты үзіліссіздігінің анықтамаларын келтіріңіз және олардың арасындағы байланысты көрсетіңіз.
24. Элементар функциялар неліктен өздерінің анықталу аймақтарында үзіліссіз болады?
25. Бірінші тамаша шекті дәлелдеңіз.
26. Бірінші және екінші тамаша шектерді қандай түрдегі анықталмағандықтарға пайдалануға болады? Мысал келтіріңіз.
27. Келесі теңдіктерді дәлелдеңіз:

   1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a},\quad a>0,\ \ a\neq 1$;

   2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=1,\quad a>0,\ a\neq 1;$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$

   4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$
28. Ақырсыз кішкене шамалардың бірінің екіншісінен реті жоғары немесе төмен болатынын қалай білуге болады?
29. Эквивалентті ақырсыз кішкене шамаларды шек табуға қолдану туралы теореманы дәлелдеңіз. Мысалдар келтіріңіз.
30. Үзіліс нүктелерінің қандай түрлерін білесіз? Мысалдар келтіріңіз.

31. Кесіндіде үзіліссіз функциялардың негізгі қасиеттерін тұжырымдаңыз және осы қасиеттердің геометриялық мағынасын ашып көрсетіңіз.

Шектерді табу керек.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-10n^{2}+1}$. (**Жауабы:** 19800.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg\left(n^{2}+2n\cos n+1\right)}{1+\lg(n+1)}$. (**Жауабы:** 2.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(n^{2}-n+1\right)}{\ln\left(n^{10}+n+1\right)}$. (**Жауабы:** $\dfrac{1}{5}$.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n}-a^{-n}}{a^{n}+a^{-n}}$ $(a\neq 0)$. (**Жауабы:** $\begin{cases}1, & |a|>1,\\ 0, & |a|=1,\\ -1, & |a|<1.\end{cases}$)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{2}+2^{2}+3^{2}+\ldots+n^{2}}{n^{3}}$. (**Жауабы:** $\dfrac{1}{3}$.)

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{101}-101x+100}{x^{2}-2x+1}$. (**Жауабы:** 5050.)

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{2x^{2}+10x+1}-\sqrt[7]{2x^{2}+10x+1}}{x}$. (**Жауабы:** $\dfrac{4}{7}$.)

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{\left(1+x^{2}\right)\left(2+x^{2}\right)\cdots\left(n+x^{2}\right)}-x^{2}\right)$ $(n\in N)$. (**Ж:** $\dfrac{n+1}{2}$.)

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{\frac{1}{x}}$. (**Жауабы:** $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.)

10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$. (**Жауабы:** $\dfrac{1}{2\pi}$.)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(ax+1)^n}{x^n+b}$, мұндағы $n\in Z,\ n\neq 0;\quad a,b-$ тұрақтылар.

(**Жауабы:** a^n, егер $n>0$; 0, егер $n<0,\ b\neq 0$; a^n, егер $n<0, a\neq 0, b=0$; ∞, егер $n<0, a=b=0.$)

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n}\right)$. (**Жауабы:** $\dfrac{1}{4}$.)

Берілген функциялардың үзіліс нүктелерін табу керек, олардың тегін анықтау керек; функциялардың графигінің эскизін салу керек.

13. $y=\dfrac{1}{\lg|x|}$. (**Жауабы:** $x_1=0$ – жөнделетін үзіліс нүктесі, $x_{2,3}=\pm 1$ – екінші текті үзіліс нүктелері);

14. $y=x\sin\dfrac{\pi}{x}$. (**Жауабы:** $x=0$ – жөнделетін үзіліс нүктесі);

15. $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$. (**Жауабы:** $x=0$ – бірінші текті үзіліс нүктесі);

16. $y=\dfrac{1}{1+2^{tgx}}$. (**Жауабы:** $x=\dfrac{\pi(2k+1)}{2}$, $k\in Z$ – бірінші текті үзіліс нүктелері);

17. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. (**Жауабы:** $x=-1$ – екінші текті үзіліс нүк-тесі, $x=0$ – жөнделетін үзіліс нүктесі);

18. $y=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$. (**Жауабы:** $x=1$ – екінші текті үзіліс нүктесі)

4.1–YT
Көрсетілген шектерді табу керек

1.

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$.

1.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+x-2}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-x-64}{x^2-x-12}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$.

1.24. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$.

1.25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-6x-27}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$.

1.29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$.

1.30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$.

2.

2.1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2-17x-2}{x^2+2x}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{x^2-\frac{1}{4}}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^2-5x+1}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$.

2.30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$.

3.

3.1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$.

3.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^3+x-5}$.

4.

4.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x}{x^4-5x^2}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-4}{3x^2-4x+1}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$.

5.

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{x^5+4x^3}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-13}{x^7-3x^5-4x}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$.

6.

6.1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

6.2. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$.

6.8. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$.

6.10. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

6.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$.

6.13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

6.14. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$.

6.16. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$.

6.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

6.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$.

6.27. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$.

6.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{8+x}-3}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$.

7.

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

7.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$.

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$.

7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$.

7.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$.

7.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$.

7.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$.

7.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$.

7.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$.

7.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$.

7.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$.

7.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$.

7.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$.

7.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$.

7.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$.

7.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$.

7.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$.

7.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$.

7.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$.

7.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$.

7.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$.

8.

(*Мұндағы* ∞ *белгісін* $+\infty$ *- плюс ақырсыздық деп алу керек*)

8.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$.

8.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$.

8.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$.

8.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$.

8.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$.

8.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$.

8.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$.

8.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$.

8.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$.

8.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$.

8.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$.

8.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$.

8.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$.

8.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$.

8.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$.

8.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$.

8.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$.

8.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$.

8.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$.

8.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$.

8.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$.

8.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$.

8.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$.

8.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$.

8.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$.

8.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$.

8.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$.

8.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$.

8.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$.

8.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$.

9.

9.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

9.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

9.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$.

9.4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{2\sin x}$.

9.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{3x^2}$.

9.6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.

9.7. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\,\frac{\pi x}{2}$.

9.8. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\pi-2x}$.

9.9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{x^2}$.

9.10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\operatorname{tg} x}$.

9.11. $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{\sin x})$.

9.12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$.

9.13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$.

9.14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

9.15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$.

9.16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

9.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{2x^2}$.

9.18. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.

9.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$.

9.20. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{tg2x})$.

9.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$.

9.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$.

9.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$.

9.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$.

9.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$.

9.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\arcsin x}$.

9.27. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.

9.28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)\operatorname{tg}x$.

9.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$.

9.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$.

4.1-ҮТ шығару үлгісі

Көрсетілген шектерді табу керек.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

$$\blacktriangleright \quad \lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0,7. \quad \blacktriangleleft$$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}$.

$$\blacktriangleright \quad \lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}=\frac{0}{24}=0. \quad \blacktriangleleft$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}$.

$$\blacktriangleright\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(7+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^4}\right)}{x^4\left(6+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}=\frac{7}{6}.\quad\blacktriangleleft$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$.

$$\blacktriangleright\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(10-\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{10-\frac{3}{x}}{x^3\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{10}{\infty}=0.\quad\blacktriangleleft$$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

$$\blacktriangleright\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{-\infty}{3}=-\infty.\quad\blacktriangleleft$$

6. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

$$► \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)}\times\frac{1}{\sqrt{21+x}+5}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}. \quad ◄$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$.

$$► \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{(2-3x)/3}\right)^{3(2-5x)/(2x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{3(2-5x)/(2x-3)}=e^{-15/2}. \quad ◄$$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}$.

$$► \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(1+7x)\ln\frac{4x+3}{2x-5}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(1+7x)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{4x+3}{2x-5}}=$$

$$=\left|\ln\frac{4}{2}=\ln 2\;>0\right|=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0. \quad ◄$$

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2}$.

► $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{(\pi-x)}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin\left(\dfrac{(\pi-x)}{4}\right)\sin\left(\dfrac{(\pi-x)}{4}\right)}{4\cdot\dfrac{(\pi-x)}{4}(\pi+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\dfrac{(\pi-x)}{4}\right)}{\pi+x}=\frac{1}{2}\frac{0}{2\pi}=0.$$

◄

4.2-ҮТ

1. $x\to 0$ ұмтылғанда $f(x)$ пен $\varphi(x)$ функциялары реттері бірдей ақырсыз кішкене шамалар екенін дәлелдеу керек.

1.1. $f(x)=\mathrm{tg}2x$, $\varphi(x)=\arcsin x$. **1.2.** $f(x)=1-\cos x$, $\varphi(x)=3x^2$.

1.3. $f(x)=\mathrm{arctg}^2\, 3x$, $\varphi(x)=4x^2$. **1.4.** $f(x)=\sin 3x-\sin x$, $\varphi(x)=5x$.

1.5. $f(x)=\cos 3x-\cos x$, $\varphi(x)=7x^2$. **1.6.** $f(x)=1-\cos 4x$, $\varphi(x)=6x^2$.

1.7. $f(x)=\sqrt{1+x}-1$, $\varphi(x)=2x$. **1.8.** $f(x)=\sin x+\sin 5x$, $\varphi(x)=2x$.

1.9. $f(x)=3x/(1-x)$, $\varphi(x)=x/(4+x)$. **1.10.** $f(x)=\dfrac{3x^2}{2+x}$, $\varphi(x)=7x^2$.

1.11. $f(x)=2x^3$, $\varphi(x)=\dfrac{5x^3}{4-x}$. **1.12.** $f(x)=\dfrac{x^2}{5+x}$, $\varphi(x)=\dfrac{4x^2}{x-1}$.

1.13. $f(x)=\sin 8x$, $\varphi(x)=\arcsin 5x$. **1.14.** $f(x)=\sin 3x+\sin x$, $\varphi(x)=10x$.

1.15. $f(x)=\cos 7x-\cos x$, $\varphi(x)=2x^2$. **1.16.** $f(x)=1-\cos 2x$, $\varphi(x)=8x^2$.

1.17. $f(x)=3\sin^2 4x$, $\varphi(x)=x^2-x^4$. **1.18.** $f(x)=\mathrm{tg}(x^2+2x)$, $\varphi(x)=x^2+2x$.

1.19. $f(x)=\arcsin(x^2-x)$, $\varphi(x)=x^3-x$. **1.20.** $f(x)=\sin 7x+\sin x$, $\varphi(x)=4x$

1.21. $f(x)=\sqrt{4+x}-2$, $\varphi(x)=3x$. **1.22.** $f(x)=\sin(x^2-2x)$, $\varphi(x)=x^4-8x$.

1.23. $f(x)=\dfrac{2x}{3-x}$, $\varphi(x)=2x-x^2$. **1.24.** $f(x)=\dfrac{x^2}{7+x}$, $\varphi(x)=3x^3-x^2$.

1.25. $f(x)=\sin(x^2+5x)$, $\varphi(x)=x^3-25x$.

1.26. $f(x)=\cos x-\cos^3 x$, $\varphi(x)=6x^2$.

1.27. $f(x)=\arcsin 2x$, $\varphi(x)=8x$.

1.28. $f(x)=1-\cos 4x$, $\varphi(x)=x\sin 2x$.

1.29. $f(x)=\sqrt{9-x}-3$, $\varphi(x)=2x$.

1.30. $f(x)=\cos 3x-\cos 5x$, $\varphi(x)=x^2$.

2. Эквивалентті ақырсыз кішкене функцияларды пайдаланып, шектерді табу керек

2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2-3x}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{tg 3x}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+2x)}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 2x}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2-4}$.

2.17. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$.

2.18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{tg 4x}$.

2.19. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-64}{\mathrm{tg}(x-4)}$.

2.20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$.

2.21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+4x^2)}{2x^3}$.

2.22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\, 5x}{\mathrm{tg}\, 2x}$.

2.23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$.

2.24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\, 8x}{tg 4x}$.

2.25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{\mathrm{tg}\, 2x}$.

2.26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$.

2.27. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^3-27}$.

2.28. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{\mathrm{tg}(x+5)}{x^2-25}$.

2.29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$.

2.30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$.

3. Берілген функцияларды үзіліссіздікке зерттеу керек және олардың графиктерін салу керек

3.1. $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \le x < 1, \\ 2x, & x \ge 1. \end{cases}$

3.2. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \le 2, \\ -x+4, & x > 2. \end{cases}$

3.3. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le -1, \\ x^2+1, & -1 < x \le 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$

3.4. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \ge 2. \end{cases}$

3.5. $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1, \\ (x+1)^3, & -1<x<0, \\ x, & x\ge 0. \end{cases}$ **3.6.** $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x\le 2, \\ x+1, & x>2. \end{cases}$

3.7. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ 2x, & 1<x\le 3, \\ x+2, & x>3. \end{cases}$ **3.8.** $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ 3+x, & x>4. \end{cases}$

3.9. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0, \\ 0, & 0<x\le 2, \\ x-2, & x>2. \end{cases}$ **3.10.** $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0, \\ x, & 0<x\le 1, \\ 2+x, & x>1. \end{cases}$

3.11. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & 0\le x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$ **3.12.** $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi, \\ 2, & x\ge \pi. \end{cases}$

3.13. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$ **3.14.** $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x^2-1, & 0\le x<1, \\ -x, & x\ge 1. \end{cases}$

3.15. $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0, \\ x^2+1, & 0\le x<2, \\ x+1, & x\ge 2. \end{cases}$ **3.16.** $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0, \\ 1, & 0<x\le 2, \\ x^2-2, & x>2. \end{cases}$

3.17. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x<\pi, \\ 3, & x\ge \pi. \end{cases}$ **3.18.** $f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<-1, \\ x^2+1, & -1\le x\le 2, \\ 2x, & x>2. \end{cases}$

3.19. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0,\\ 2^x, & 0<x\le 2,\\ x+3, & x>2. \end{cases}$ **3.20.** $f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\le -2,\\ x^3, & -2<x\le 1,\\ 2, & x>1. \end{cases}$

3.21. $f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\le -1,\\ x^2-2, & -1<x<2,\\ x, & x\ge 2. \end{cases}$ **3.22.** $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0,\\ (x-2)^2, & 1<x<3,\\ -x+6, & x\ge 3. \end{cases}$

3.23. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1,\\ x^2+2, & 1\le x\le 2,\\ -2x, & x>2. \end{cases}$ **3.24.** $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1,\\ x-1, & -1\le x\le 3,\\ -x+5, & x>3. \end{cases}$

3.25. $f(x)=\begin{cases} x, & x<-2,\\ -x+1, & -2\le x\le 1,\\ x^2-1, & x>1. \end{cases}$ **3.26.** $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0,\\ -x^2+4, & 0<x<2,\\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$

3.27. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1<x\le 2,\\ 2x, & x>2. \end{cases}$ **3.28.** $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x>\pi. \end{cases}$

3.29. $f(x)=\begin{cases} 2, & x<-1,\\ 1-x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x>1. \end{cases}$ **3.30.** $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 2,\\ x+4, & x>2. \end{cases}$

4. Берілген функцияларды көрсетілген нүктелерде үзіліссіздікке зерттеп, үзіліс нүктелерінің маңайындағы функция графигінің эскизін салу керек

4.1. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1;\quad x_1=3,\quad x_2=4.$

4.2. $f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}}$ **-1;** $x_1 = $ **3,** $x_2 = $ **4.**

4.3. $f(x) = \dfrac{x+7}{x-2}$ **;** $x_1 = $ **2,** $x_2 = $ **3.**

4.4. $f(x) = \dfrac{x-5}{x+3}$ **;** $x_1 = $ **-2,** $x_2 = $ **-3.**

4.5. $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2$ **;** $x_1 = $ **2,** $x_2 = $ **3.**

4.6. $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}$ **;** $x_1 = $ **0,** $x_2 = $ **2.**

4.7. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}}$ **+1;** $x_1 = $ **4,** $x_2 = $ **5.**

4.8. $f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}}$ **-2;** $x_1 = $ **3,** $x_2 = $ **4.**

4.9. $f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}}$ **+3;** $x_1 = $ **3,** $x_2 = $ **4.**

4.10. $f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}}$ **+1;** $x_1 = $ **4,** $x_2 = $ **5.**

4.11. $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$ **;** $x_1 = $ **-5,** $x_2 = $ **-4.**

4.12. $f(x) = \dfrac{x+5}{x-2}$ **;** $x_1 = $ **3,** $x_2 = $ **2.**

4.13. $f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}$ **;** $x_1 = $ **3,** $x_2 = $ **4.**

4.14. $f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}}$ **-3;** $x_1 = $ **1,** $x_2 = $ **2.**

4.15. $f(x) = 2^{\frac{5}{1-x}}$ **-1;** $x_1 = $ **0,** $x_2 = $ **1.**

4.16. $f(x) = 8^{\frac{4}{x-2}}$ **-1;** $x_1 = $ **2,** $x_2 = $ **3.**

4.17. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}$ **+1;** $x_1=$ **2,** $x_2=$ **3.**

4.18. $f(x)=\dfrac{3x}{x-4}$ **;** $x_1=$ **4,** $x_2=$ **5.**

4.19. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ **;** $x_1=$ **1,** $x_2=$ **2.**

4.20. $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}$ **+1;** $x_1=$ **-2,** $x_2=$ **-1.**

4.21. $f(x)=4^{\frac{3}{x-2}}$ **+2;** $x_1=$ **2,** $x_2=$ **3.**

4.22. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}$ **-2;** $x_1=$ **-1,** $x_2=$ **0.**

4.23. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}$ **+1;** $x_1=$ **-5,** $x_2=$ **-4.**

4.24. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+2}$ **;** $x_1=$ **-2,** $x_2=$ **-1.**

4.25. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+3}$ **;** $x_1=$ **-3,** $x_2=$ **-2.**

4.26. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$ **;** $x_1=$ **3,** $x_2=$ **4.**

4.27. $f(x)=3^{\frac{4}{1-x}}$ **+1;** $x_1=$ **1,** $x_2=$ **2.**

4.28. $f(x)=\dfrac{4x}{x+5}$ **;** $x_1=$ **-5,** $x_2=$ **-4.**

4.29. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$ **;** $x_1=$ **3,** $x_2=$ **4.**

4.30. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ **;** $x_1=$ **2,** $x_2=$ **3.**

4.2-ҮТ шығару үлгісі

1. $f(x)=\cos 2x-\cos^3 2x$ және $\varphi(x)=3x^2-5x^3$ функциялары $x\to 0$ ұмтылғанда, реттері бірдей ақырсыз кішкене болатынын дәлелдеу керек.

► Табамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos^3 2x}{3x^2-5x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\left(1-\cos^2 2x\right)}{x^2(3-5x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin^2 2x}{x^2(3-5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot\sin 2x}{2x2x(3-5x)}=\frac{4}{3}.$$

§4.7, (3) теңдік $C=\frac{4}{3}\neq 0$ үшін орындалғандықтан, берілген функциялар $x\to 0$ ұмтылғанда, реттері бірдей ақырсыз кішкене. ◄

2. Эквивалентті ақырсыз кішкене функцияларды пайдаланып шекті табу керек: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}$.

► § 4.7 теореманы, (7) және (10) қатыстарды пайдаланамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x}=2. \quad ◄$$

3. Берілген функцияны үзіліссіздікке зерттеу керек және оның графигін салу керек: $f(x)=\begin{cases} x^2, & -\infty<x\le 0,\\ (x-1)^2, & 0<x\le 2,\\ 5-x, & 2<x<+\infty. \end{cases}$

► $f(x)$ функциясы $(-\infty;0)$, $(0;2)$ және $(2;+\infty)$ интервалдарының әрқайсысында элементар функциялар арқылы берілгендіктен, осы интервалдарда үзіліссіз. Сондықтан үзіліс нүктелері бар болса ол $x_1=0$ немесе $x_2=2$ ғана болуы мүмкін.

$x_1=0$ нүктесін үзіліссіздікке зерттейік

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x^2=0, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)=1$$

$$f(0)=x^2\big|_{x=0}=0,$$

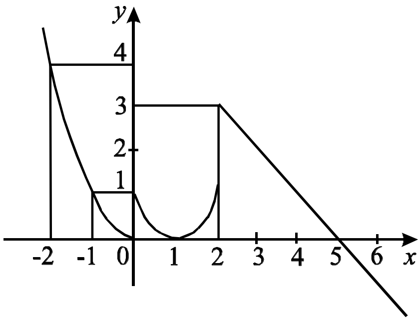
яғни $x_1=0$ функцияның бірінші текті үзіліс нүктесі.

$x_2=2$ нүктесін үзіліссіздікке зерттейік

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)^2=1, \quad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(5-x)=3$$

$$f(2)=(x-1)^2\big|_{x=2}=1,$$

яғни $x_2=2$ – функцияның бірінші текті үзіліс нүктесі (39'-сурет).



39'-сурет

4. $f(x)=8^{\frac{1}{x-3}}+1$ **функциясын** $x_1=3$ **және** $x_2=4$ **нүктелерінде үзіліссіздікке зерттеу керек.**

► $x_1=3$ нүктесін үзіліссіздікке зерттейік

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\left(8^{\frac{1}{(x-3)}}+1\right)=8^{-\infty}+1=1,$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right)=8^{+\infty}+1=+\infty.$$

Олай болса, $x_1=3$ функцияның екінші текті үзіліс нүктесі.

$x_2 = 4$ нүктесін үзіліссіздікке зерттейік

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0}\left(8^{\frac{1}{(x-3)}}+1\right) = 9,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0}\left(8^{\frac{1}{(x-3)}}+1\right) = 9,$$

$$f(4) = 8^{\frac{1}{(4-3)}}+1 = 9.$$

Демек, $x_2 = 4$ нүктесінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз. ◄

5. БІР АЙНЫМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕРІ

§ 5.1. Туынды

5.1.1. Анықтамалар мен алғашқы түсініктер

$y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және оның белгілі бір маңайында анықталсын. Егер x_0 нүктесіндегі аргумент өсімшесі $h = \Delta x = \left(x_0 + h\right) - x_0 = x - x_0$ болса, онда осы өсімше тудырған (немесе осы өсімшеге сәйкес) функция өсімшесі $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ арқылы белгіленетін еді (§4.5). ***Аталған өсімшелер*** $h = \left(x_0 + h\right) - x_0$ ***санына тәуелді болатындықтан, олар сәйкес*** $\Delta x(h)$ ***және*** $\Delta f(x_0; h)$ ***символдарымен белгіленеді. Алайда ықшамдылық үшін жиі қолданылатын*** Δx ***және*** $\Delta f(x_0)$ ***символдарын пайдаланамыз.***

Анықтама. *Егер* x_0 *нүктесіндегі* $h = \Delta x$ *– аргумент өсімшесіне сәйкес алынған* $\Delta f(x_0)$ **-** *функция өсімшесінің осы* $h = \Delta x$ *аргумент өсімшесіне қатынасының* $h \to 0$ *ұмтылғандағы шегі бар болса, онда ол шек* $y = f(x)$ ***функциясының*** x_0 ***нүктедегі туындысы*** *деп аталады және* $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, *т.с.с. символдардың бірімен белгіленеді.*

Сонымен,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Егер (1) шек $+\infty$ немесе $-\infty$ тең болса, онда f функциясының x_0 нүктесінде **ақырсыз туындысы бар,** атап айтқанда, егер $f'(x_0) = +\infty$ болса ***плюс ақырсыз***, ал $f'(x_0) = -\infty$ болса ***минус ақырсыз туындысы*** бар дейді. Егер $f'(x_0)$ туындысы нақты санға, немесе $+\infty$ немесе $-\infty$

ақырсыздықтарының біріне тең болса, онда функцияның x_0 нүктеде **кең мағыналы туындысы** бар дейміз.

Егер (1) теңдіктегі шектер $h\to0$, $h>0$ (яғни $x\to x_0$, $x>x_0$) жағдайында қарастырылса, онда шек (ол бар болса) f функциясының x_0 нүктедегі **оң жақ туындысы**, ал $h\to0$, $h<0$ (яғни $x\to x_0$, $x<x_0$) жағдайында қарастырылса, онда шек (бар болса) f функциясының x_0 нүктедегі **сол жақ туындысы** деп аталады және сәйкес $f'(x_0+), f'(x_0-)$ арқылы белгіленеді:

$$f'(x_0+)=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{\Delta f(x_0)}{h},\qquad f'(x_0-)=\lim_{\substack{h\to0\\h<0}}\frac{\Delta f(x_0)}{h}.$$

Функцияның x_0 нүктесінде туындысы бар болуы үшін,

1) $\exists f'(x_0+)$, $\exists f'(x_0-)$ және **2)** $f'(x_0+)=f_c'(x_0-)$

шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті:

$$f'(x_0+)=f'(x_0-)=f'(x_0). \tag{2}$$

Мысал. $f(x)=|x|$ функциясы ***кез келген нүктеде үзіліссіз***, өйткені

$$|\Delta f(x)|=|f(x+h)-f(x)|=\big||x+h|-|x|\big|\le|x+h-x|\le|h|\to0,\quad h\to0.$$

Бірақ ***оның*** x=0 ***нүктесінде туындысы жоқ***.

▼ Расында да, бұл нүктеде $\Delta f(0)=|0+h|-|0|=|h|$ ескерсек

$$f'(0+)=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{\Delta f(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{|h|}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{h}{h}=1,$$

$$f'(0-)=\lim_{\substack{h\to0\\h<0}}\frac{\Delta f(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\h<0}}\frac{|h|}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\h<0}}\frac{-h}{h}=-1.$$

Функцияның $x=0$ нүктесінде біржақты туындылары бар, бірақ, $f'(0+)\ne f'(0-)$ болғандықтан, оның бұл нүктеде туындысы жоқ. ▲

Сонымен ***функция нүктеде үзіліссіз болғанымен, осы нүктеде функцияның туындысы болмауы мүмкін*** екен.

Ал бұған кері тұжырым басқаша: ***х нүктесінде ақырлы туындысы бар функция осы нүктеде үзіліссіз*** болады.

▼ Шынында да, x нүктесінде (1) ақырлы шек бар болса, онда оны келесі түрде: $\frac{\Delta y}{h} = f'(x) + \varepsilon(h), \quad (\varepsilon(h) \to 0, \quad h \to 0)$ жаза аламыз. Бұл теңдіктен $\Delta y = f'(x) \cdot h + h \cdot \varepsilon(h),$ ал бұдан $\lim\limits_{h\to 0} \Delta y = f'(x) \lim\limits_{h\to 0} h + \lim\limits_{h\to 0} h \cdot \varepsilon(h) = 0,$ аламыз. Демек, функция x нүктесінде үзіліссіз. ▲

Салдар. Егер x_0 нүктесі f функциясының үзіліс нүктесі болса, онда осы нүктеде оның ***ақырлы туындысы*** болмайды.

Назарыңызға! ***Ақырсыз туындылар*** үшін басқаша: f функциясының x_0 үзіліс нүктесінде де ақырсыз туындысы бар болуы мүмкін. Мысалы, $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0, \\ \sqrt[3]{x} - 1, & x < 0 \end{cases}$ функциясының x=0 үзіліс нүктесінде плюс ақырсыз туындысы бар (тексеріңіз).

Ал егер (1) шек $f'(x_0) = \infty$ болса, онда функцияның x_0 нүктесінде **туындысы жоқ** деп қабылдаймыз. Өйткені олай болмаса, онда ол кейбір математикалық тұжырымдарды (мысалы, $f'(x_0+) = f'(x_0-) = f'(x_0)$ теңдіктерін және 42-45-суреттер мен олардың түсініктемелерін қараңыз), бірқатар теоремаларды (мыса-лы, орта мән туралы теоремалар) қарама-қайшылыққа әкеледі.

Келтірілген тұжырымдар біржақты туындылар үшін де орындалады.

5.1.2. Туындының механикалық және геометриялық мағыналары.

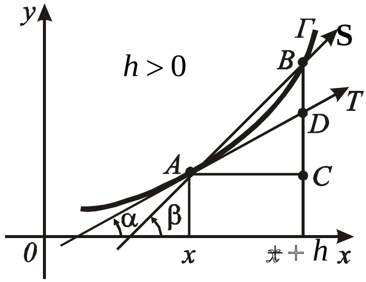
Лездік жылдамдық. S=s(t) функциясы нүктенің түзу сызықты қозғалысының заңдылығын көрсетсін (S – нүктенің t уақыт кезеңіндегі жүрген жолы). Нүктенің $[t,\ t+\Delta t]$ уақыт аралығында жүрген жолы $\Delta S = s(t+\Delta t) - s(t).$ Оның осы уақыт ішіндегі ***орташа*** жылдамдығы

$\nu_{op} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, ал t уақыт кезеңіндегі ***лездік*** жылдамдығы $\nu = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = s'(t)$ тең.

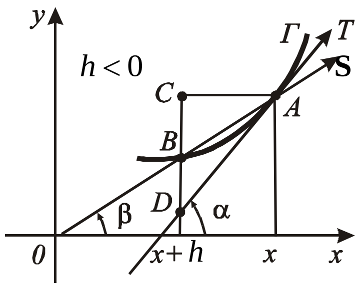
Ток күші. $Q = f(t)$ функциясы t уақыт кезеңіндегі өткізгіштің қимасынан өтетін ток мөлшерін көрсетсін. Онда $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ шамасы $[t,\ t+\Delta t]$ уақыт аралығындағы токтың орта күшін, ал $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t) = J$ шамасы t уақыт кезеңіндегі ток күшін көрсетеді.

Туындының геометриялық мағынасы

$A(x, f(x))$ – тік бұрышты Oxy декарт координаттар жүйесінде берілген $\Gamma:\ y = f(x),\ x \in [a,b]$ үзіліссіз қисықтың нүктесі болсын. (a,b) аралығында жатқан кез келген $(x+h) \in (a,b)$ нүктені алып $A(x, f(x))$ мен $B(x+h; f(x+h))$ нүктелерінен өтетін S түзуін жүргіземіз және оның бағытын, осы түзу мен Ox өсінің оң бағыты арасындағы β бұрышы ***сүйір*** болатындай етіп таңдаймыз $(-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2})$! Бұл түзуді **қиюшы** (оны қою ***S*** әрпімен белгілейміз), ал β бұрышын - қиюшының Ox өсіне ***көлбеу бұрышы*** деп атаймыз (39-суретте, $h > 0$; 40-суретте, $h < 0$).



39-сурет



40-сурет

Қиюшы, абсциссалары x және $x+h$ тең нүктелер арқылы өтетіндіктен, оның еңкею бұрышын $\beta=\beta(x;h)$ арқылы белгілейміз.

Егер $h\to 0$ ұмтылғанда, ***S*** *қиюшының* $\beta(x;h)$ көлбеу бұрышы α санына ұмтылса, *онда* ***S*** *қиюшы* көлбеу бұрышы α-ға тең ***T*** *бағытталған түзуге ұмтылады*.

$A(x,f(x))$ нүктесі арқылы өткен ***T*** түзуінің α көлбеу бұрышының мәндері $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде жатады.

Анықтама. Егер $\Gamma:\ y=f(x),\ x\in[a,b]$ қисығындағы $A(x,f(x))$ және $B(x+h;f(x+h))$ нүктелерінен өтетін ***қиюшының көлбеу бұрышының*** $h\to 0$ ұмтылғандағы шегі бар және ол шек $A(x,f(x))$ нүктесі арқылы өткен ***T*** *бағытталған түзудің* көлбеу бұрышына тең болса, онда ***бағытталған T*** түзуі Γ қисығының $A(x,f(x))$ нүктесіндегі **жанамасы** деп аталады.

Аналитикалық геометриядан, $(x_0,\ y_0)$ нүктесі арқылы өтетін, бұрыштық коэффициенті $k=\mathrm{tg}\,\alpha$ тең түзудің теңдеуі $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$ түрінде жазылатыны белгілі. Олай болса, $f'(x_0)$ ***ақырлы болса,*** $y=f(x)$ қисығының $A(x_0,y_0)$ нүктесіндегі жанамасының теңдеуі

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0), \tag{1}$$

ал ***нормалінің*** теңдеуі

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\left(x-x_0\right) \tag{2}$$

түрінде жазылады. Егер $f'(x_0)$ ***ақырсыз*** болса, онда жанаманың теңдеуі $x=x_0$, ал нормальдің теңдеуі $y=y_0$ түрінде болады.

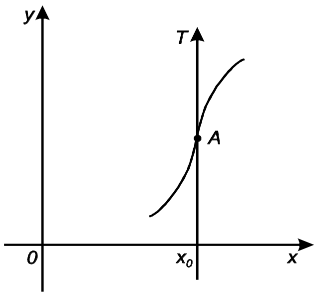
Енді ақырсыз туындыға қатысты келесі ***төрт маңызды жағдайды*** атап өтеміз:

1) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\ \beta\to\frac{\pi}{2}$ – (функция туындысы бар; жанама $x=x_0$ және ол *оу* өсімен бағыттас 41-сурет);

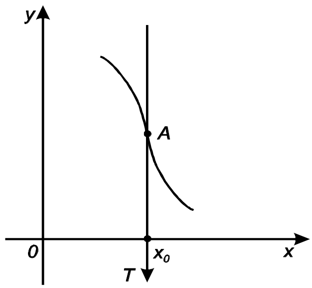
2) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\ \beta\to-\dfrac{\pi}{2}$ – (функция туындысы бар; жанама $x=x_0$ және ол oy өсіне қарама қарсы бағытталған (42-сурет);

3) $f'(x-)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\ \beta\to-\dfrac{\pi}{2}$; $f'(x+)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,$

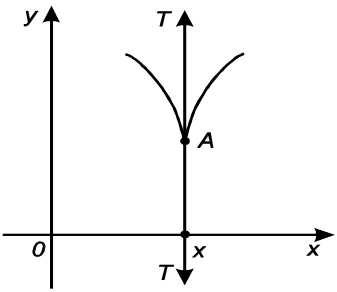
$\beta\to\dfrac{\pi}{2}$, яғни $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, демек, функцияның туындысы жоқ. Мұнда сол жақ, оң жақ жанамалар x өсіне перпендикуляр және олар сәйкес төмен және жоғары бағытталған, яғни x нүктесінде жанама жоқ (43-сурет);



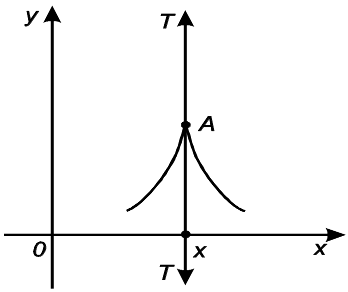
41-сурет



42-сурет



43-сурет



44-сурет

4) $f'(x-)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\ \beta\to\dfrac{\pi}{2},\quad f'(x+)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\quad \beta\to-\dfrac{\pi}{2},$

яғни $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, демек, функцияның туындысы жоқ.

Мұнда сол жақ, оң жақ жанамалар x өсіне перпендикуляр және олар сәйкес жоғары және төмен бағытталған (44-сурет).

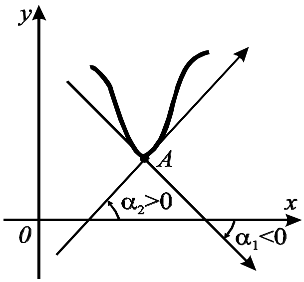
Қосымша материал.

Жанаманың α еңкею бұрышы x нүктесі арқылы бірмәнді анықталатындықтан, $x\in[a,b]$ нүктелері үшін $\alpha=\alpha(x)$ – мәндері $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ аралығында жататын **бұрыштық функция**.

Кез келген $\Gamma:\ y=f(x),\ x\in[a,b]$ қисығы үшін $[a,b]$ кесіндінің кейбір нүктелерінде бұрыштық функция болмауы да мүмкін. Өйткені, анықтама бойынша, ***Г қисығының*** $A(x,f(x))$ **нүктесіндегі жанамасының бар болуы келесі ақырлы шектің**

$$\lim_{h\to 0}\beta(x;h)=\alpha(x),\qquad -\frac{\pi}{2}\le\alpha(x)\le\frac{\pi}{2},\tag{1}$$

бар болуымен *пара пар*. Мысалы, 45-суретте көрсетілген қисықтың A нүктесінде жанамасы, демек бұрыштық функциясы жоқ (анықталмаған), өйткені $\lim\limits_{h\to 0+}\beta(x;h)=\alpha_2$, $\lim\limits_{h\to 0-}\beta(x;h)=\alpha_1$, $(\alpha_1\ne\alpha_2)$, яғни, $\lim\limits_{h\to 0}\beta(x;h)$ шегі жоқ. Бірақ, еңкею бұрыштары α_1, α_2 тең, сәйкес **сол жақ** және **оң жақ жанамалары** бар.



45-сурет.

Енді (1) теңдікті пайдаланып, $\beta(x;h) = arctg\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ теңдігін (39 және 40 суреттерді қараңыз) және *arctg* функциясының кез келген нүктеде үзіліссіздігін ескеріп, қисықтың берілген ***нүктедегі бұрыштық функциясын*** келесі түрде жаза аламыз

$$\alpha(x) = arctg \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = arctg f'(x). \qquad (2)$$

Енді (2) теңдікті пайдаланып келесі маңызды тұжырымға келеміз.

Егер $x \in [a,b]$ *нүктесінде* $y = f(x)$ *функциясының (кең мағыналы) туындысы бар болса, онда* $\Gamma:\ y = f(x),\ x \in [a,b]$ *қисығының* $(x, f(x))$ *нүктесінде бұрыштық коэффициенті* $\mathrm{tg}\,\alpha(x) = f'(x)$ *тең жанамасы бар және, керісінше, егер* Γ *қисығы үшін* $(x, f(x))$*нүктеде еңкею бұрышы* $\alpha(x)$ *тең жанама бар болса, онда х нүктесінде кең мағыналы туынды бар (* $f'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha(x)$*). Қысқаша айтқанда, кең мағыналы туындының бар болуы мен жанаманың бар болуы – парапар ұғымдар.*

Мұндай тұжырым ақырлы туынды үшін орындалмайды!

Анықтама. Егер берілген $y = f(x),\ x \in \Delta$ функциясы үшін Δ аралығының әрбір нүктесінде (2) теңдікпен анықталатын $\alpha = \alpha(x)$ функция бар болса, онда ол f функциясының Δ ***аралығындағы бұрыштық функциясы*** деп аталады.

Анықтама.*.** $\Gamma:\ y = f(x),\ x \in [a,b]$ қисығы берілсін. Егер f функциясының $[a;b]$ кесіндіде ***үзіліссіз бұрыштық функциясы бар болса, онда Γ – осы кесіндіде ***тегіс қисық*** деп аталады.

Мысал. Келесі функциялармен берілген қисықтар тегіс пе: **a)** $\Gamma_1:\ f(x) = \sqrt[3]{x}$;

b) $\Gamma_2:\ f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; **c)** $\Gamma_3:\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$?

▼ **а)** $\Gamma_1:\ f(x) = \sqrt[3]{x}$ қисығының *бұрыштық функциясы бар* және ол кез келген нүктеде *үзіліссіз*. Шынында да,

$$\alpha(x)=\begin{cases} arctg\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, & x\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\end{cases}$$ және $x\neq 0$ нүктелерінде екі үзіліссіз функцияның композициясы да үзіліссіз, ал $x=0$ нүктесінде

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)==\lim_{x\to 0} arctg\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=arctg\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{2}=\alpha(0)$$

теңдігі орындалатындықтан $\alpha(x)$ кез келген нүктеде үзіліссіз функция, демек Γ_1 – тегіс қисық;

b) Егер $x\neq 0$ болса, онда (2) теңдік бойынша $\alpha(x)=arctg\,\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Ал $x=0$ нүктесі үшін келесі теңдіктер орындалады:

$$\alpha(0+)=\lim_{h\to 0+}\beta(0;h)=arctg\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt[3]{h^2}-\sqrt[3]{0}}{h}=arctg\lim_{h\to 0+}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=\frac{\pi}{2};$$

$$\alpha(0-)=\lim_{h\to 0-}\beta(0;h)=arctg\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt[3]{h^2}-\sqrt[3]{0}}{h}=arctg\lim_{h\to 0-}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=-\frac{\pi}{2}.$$

Мұнда $\alpha(0+)\neq\alpha(0-)$ болғандықтан (2) шек жоқ, яғни $x=0$ ***нүктесінде бұрыштық функция (жанама) анықталмаған***. Олай болса, Γ_2 — тегіс емес қисық;

c) Бұл функция үшін кез келген нүктеде бұрыштық функция бар:

$$\alpha(x)=\begin{cases} arctg\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$ Бірақ ол $x=0$ нүктесінде үзілісті: $x=0$ — ***бұрыштық функцияның екінші текті үзіліс нүктесі*** ($\cos\dfrac{1}{x}$ функциясының $x=0$ нүктеде шегі жоқ). Анықтама шарты орындалмағандықтан, Γ_3 тегіс емес қисық. ▲

«Тегіс функция» ұғымының белгілі анықтамасы келесі түрде тұжырымдалады (мысалы, С.М.Никольский, Курс математического анализа, т.1, «Наука», 1983, §5.15 қараңыз)

Анықтама. Егер $y = f(x)$ үзіліссіз функциясының туындысы $\left[a,b\right]$ кесіндісінде **үзіліссіз** болса, онда функция осы кесіндіде **тегіс** деп аталады.

Бұл анықтама бойынша, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциясы тегіс емес (тексеріңіз). Біз жоғарыда $a)\ \Gamma_1 : f(x) = \sqrt[3]{x}$ қисығының тегіс екенін көрсеткенбіз. Ендеше $y = f(x)$ функциясының тегіс болуы мен $\Gamma:\ y = f(x),\ x \in \left[a;b\right]$ қисығының тегіс болуы пара пар ұғымдар емес!

5.1.3. Туындыны анықтама арқылы есептеу.

Кейбір элементар функциялар үшін олардың туындыларын анықтама арқылы есептеу жолын көрсетейік.

1) Егер $f(x) = C$, C – тұрақты сан болса, онда $C' = 0$.

▼ $$C' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$ ▲

2) ***Көрсеткіштік функция*** $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$ үшін

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (1)$$

▼ $$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a;$$ ▲

3) ***Дәрежелік функция*** $f(x) = x^a$, (a- сан) үшін

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}. \qquad (2)$$

Дербес жағдайда, егер $a = \frac{1}{2}$ немесе $a = -1$ болса, онда

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (3)$$

▼ $$(x^a)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^a - x^a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^a \cdot \left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^a - 1\right]}{h} =$$

$$= x^{a-1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^a - 1}{\frac{h}{x}} = \left|\begin{matrix}\frac{h}{x}=t, & x\neq 0\\ h\to 0, & t\to 0\end{matrix}\right| = x^{a-1}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^a - 1}{t} = ax^{a-1}.$$ ▲

4) ***Логарифмдік функция:*** $y=\log_a x,\quad a>0,\ a\neq 1.$ үшін

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}. \tag{4}$$

Дербес жағдайда, егер $a=e$ болса, онда

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}. \tag{5}$$

▼ $$\left(\log_a x\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{h} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\log_a\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}.$$ ▲

5. ***Тригонометриялық функциялар*** $y=\sin x,\ y=\cos x$ үшін

$$\left(\sin x\right)' = \cos x. \tag{6}$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x. \tag{7}$$

▼ $$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cdot\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos x.$$ ▲

(7) формула да осы сияқты дәлелденеді.

5.1.4. Дифференциалдау ережелері

x нүктесінде ***ақырлы туындысы бар*** функция ***дифферен-циалданатын*** функция деп аталады (5.2-ні қараңыз). Берілген аралықта дифференциалданатын функция деп, осы аралықтың әрбір нүктесінде дифференциалданатын функцияны айтады.

1-теорема. Егер $u(x)$ және $\vartheta(x)$ функциялары x нүктесінде дифференциалданатын болса, онда осы нүктеде олардың ***қосын-дысы, көбейтіндісі және қатынасы*** $\left(\vartheta(x)\neq 0\right)$ дифферен-циалданады және

$$1)\left(u\pm\vartheta\right)' = u'\pm\vartheta'; \qquad 2)\left(u\cdot\vartheta\right)' = u'\vartheta+u\vartheta';$$

$$3)\left(\frac{u}{\vartheta}\right)' = \frac{u'\vartheta-u\vartheta'}{\vartheta^2}$$

теңдіктері орындалады.

▼ Бұл теңдіктерді дәлелдеу үшін туынды анықтамасын және $f(x+h)=f(x)+\Delta f(x)$ теңдігін пайдаланамыз.

1) $$\left(u\pm\vartheta\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)\pm\vartheta(x+h)\right]-\left[u(x)\pm\vartheta(x)\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(u(x)+\Delta u)\pm(\vartheta(x)+\Delta\vartheta)\right]-\left[u(x)\pm\vartheta(x)\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{h} = u'(x)\pm\vartheta'(x);$$

2) $$\left(u\cdot\vartheta\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\vartheta(x+h)-u(x)\cdot\vartheta(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x)+\Delta u\right]\left[\vartheta(x)+\Delta\vartheta\right]-u(x)\vartheta(x)}{h} =$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x)\cdot\Delta\vartheta}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\vartheta(x)\cdot\Delta u}{h}+\lim_{h\to 0}\Delta u\cdot\frac{\Delta\vartheta}{h}=u\vartheta'+u'\vartheta.$$

Мұнда $u(x),\vartheta(x)$ функцияларының h-ке тәуелсіз екендігі және олардың үзіліссіздігі $\left(\lim\limits_{h\to 0}\Delta u=0\right)$ пайдаланылды.

3) $$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{\vartheta(x+h)}-\dfrac{u(x)}{\vartheta(x)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x)+\Delta u\right]\cdot\vartheta(x)-\left[\vartheta(x)+\Delta\vartheta\right]\cdot u(x)}{\left[\vartheta(x)+\Delta\vartheta\right]\cdot\vartheta(x)\cdot h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u\cdot\vartheta-\Delta\vartheta\cdot u}{\left(\vartheta^2+\vartheta\cdot\Delta\vartheta\right)h}=\lim_{h\to 0}\frac{\vartheta\cdot\dfrac{\Delta u}{h}-u\cdot\dfrac{\Delta\vartheta}{h}}{\vartheta^2+\vartheta\cdot\Delta\vartheta}=\frac{u'\vartheta-u\vartheta'}{\vartheta^2}\ .\ \blacktriangle$$

Егер $u(x)$ немесе $\vartheta(x)$ функцияларының біреуі тұрақты болса, онда: $(u+c)'=u'$; $(c\cdot u)'=c\cdot u'$; $\left(\dfrac{c}{\vartheta}\right)'=-\dfrac{c\cdot\vartheta'}{\vartheta^2}$.

Мысалдар.

1) $$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\cdot\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x};$$

2) $\left(\operatorname{ctg}x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (тексеріңіз).

2-теорема (*күрделі функцияны дифференциалдау ережесі*). $u=u(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын және $u(x_0)=u_0$, ал $y=f(u)$ функциясы u_0 нүктесінде дифференциалданатын болсын. Онда $y=f[u(x)]$ күрделі функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданады және

$$[f(u(x_0))]'=f'(u_0)\cdot u'(x_0). \qquad (1)$$

▼ $x=x_0+h$ болса, онда

$$u(x_0+h)=u(x_0)+\Delta u=u_0+\Delta u, \quad f[u(x_0+h)]=f(u_0)+\Delta f.$$

Ал $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta u}=f'(u_0)$ теңдігінен

$$\Delta f=f'(u_0)\cdot\Delta u+\mathrm{o}(\Delta u)\cdot\Delta u \qquad \left(\mathrm{o}(\Delta u)\to 0,\ \ \Delta u\to 0\right),$$

бұл теңдіктен $\dfrac{\Delta f}{h}=f'(u_0)\dfrac{\Delta u}{h}+\mathrm{o}(\Delta u)\dfrac{\Delta u}{h}$ шығады. Енді $h\to 0$ ұмтылдырып шекке өтсек:

$$[f(u(x_0))]'=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to 0}f'(u_0)\frac{\Delta u}{h}+\lim_{h\to 0}\overset{=}{o}(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{h}=f'(u_0)\cdot u'(x_0).$$ ▲

Мысалдар.

1) $(\sin x^2)'$ туындысын есептеу үшін $y=\sin x^2=\sin u,\ \ u=x^2$ деп аламыз. Онда $\left(\sin x^2\right)'=\left(\sin u\right)'\cdot\left(x^2\right)'=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2.$

2) $\left(x^x\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot\left(x\cdot\ln x\right)'=e^{x\ln x}\left(\ln x+1\right)=x^x\left(\ln x+1\right).$

Келесі, $y=u(x)^{\vartheta(x)}$ $(u>0)$ түріндегі функцияның туынды-сын табу үшін $u^{\vartheta}=e^{\vartheta\ln u}$ теңдігін пайдалануға болады:

$$\left(u^{\vartheta}\right)' = \left(e^{\vartheta \ln u}\right)' = e^{\vartheta \ln u} \cdot \left(\vartheta \cdot \ln u\right)' = u^{\vartheta}\left(\vartheta' \cdot \ln u + \vartheta \cdot \frac{u'}{u}\right). \qquad (3)$$

(3) өрнекті f функциясының **логарифмдік туындысы** деп аталатын

$$\left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (4)$$

теңдігін пайдаланып та шығаруға болады. Ол үшін $\ln u^{\vartheta} = \vartheta \ln u$ теңдігіне (4) формуланы пайдалансақ, $\dfrac{(u^{\vartheta})'}{u^{\vartheta}} = \left(\vartheta \ln u\right)' = \vartheta' \ln u + \vartheta \dfrac{u'}{u}$ аламыз. Бұл теңдіктен (3) теңдік шығады.

(1) формуланы күрделендіре түсуге болады. Мысалы, егер $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$, $x = \psi(\xi)$ болып, осы үш функция да сәйкес нүктелерде дифференциалданатын болса, онда

$$z'_{\xi} = z'_{y} \cdot y'_{x} \cdot x'_{\xi}. \qquad (5)$$

1-мысал. $y = \ln \sin^2 x,\ \left(x \neq 0\right)$ берілсе, $y = \ln u,\ u = \vartheta^2,\ \ \vartheta = \sin x$ деп алып, (5) формула бойынша

$$y'_x = y'_u \cdot u'_{\vartheta} \cdot \vartheta'_x = \frac{1}{u} \cdot 2\vartheta \cdot \cos x = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = 2\operatorname{ctg} x$$

аламыз. Бұл есептеуді қысқаша жазуға болады:

$$\left(\ln \sin^2 x\right)' = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 2\frac{\cos x}{\sin x} = 2\operatorname{ctg} x.$$

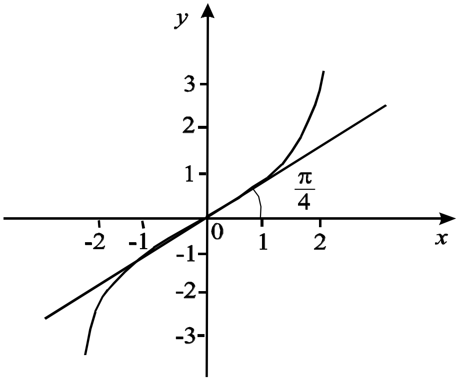
2-мысал. $y' = \left[\sin(x^2 + 2x - 1)\right]' = \cos(x^2 + 2x - 1) \cdot (2x + 2) =$

$$= 2(x+1)\cos(x^2 + 2x - 1).$$

5.1.5. Гиперболалық функциялар және олардың туындылары

1) Гиперболалық синус: $y = \operatorname{sh} x$.

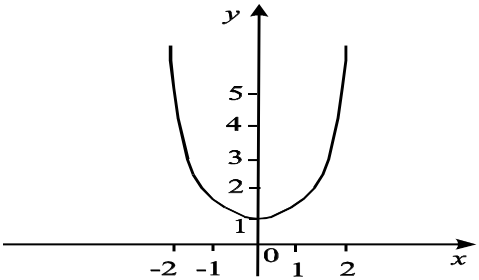
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad D = R, \ E = R \ \text{(46-сурет).}$$



46-сурет

2) Гиперболалық косинус: $y = \operatorname{ch} x$.

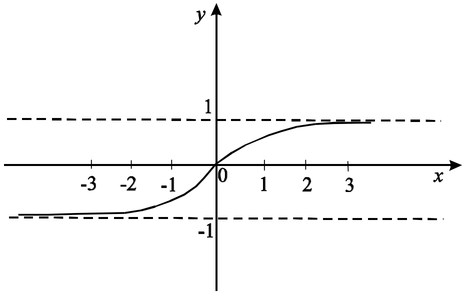
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad D = R, \quad E = [1; +\infty) \quad \text{(47-сурет).}$$



47-сурет

3) Гиперболалық тангенс: $y = thx$.

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ D = (-\infty, +\infty), \quad E = (-1,\ 1). \quad \text{(48-сурет).}$$

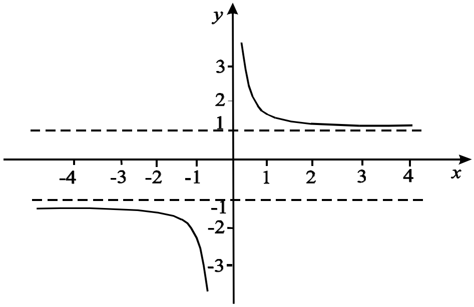


48-сурет

4) Гиперболалық котангенс: $y = \operatorname{cth} x$.

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \quad E = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \ \text{(49-сурет).}$$



49-сурет

Бұл функцияларға қатысты келесі теңдіктердің орындалатынын тексеріңіздер:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{chch} y; \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y};$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x\ ;\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;\quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};\ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Ескерту. Біз жоғарыда элементар функцияның өзінің анықталу жиынында дифференциалданбауы мүмкін екенін көрдік ($y = |x|$ мысалы). Бірақ, егер f қандай да бір аралықта элементар және дифференциалданатын функция болса, онда f' функциясы осы аралықта элементар болады. Қысқаша айтқанда, ***элементар функцияның туындысы да элементар функция*** болады. Бұл тұжырым алдыңғы (5.3. – 5.5. пп.) пункттерден шығады.

5.1.6. Кері функцияның туындысы.

$y = f(x)$ функциясының анықталу жиыны *D*, мәндер жиыны Е болсын.

Анықтама. *Егер әрбір* $x \in D$ *үшін* $g[f(x)] = x$ *және әрбір* $y \in \mathrm{E}$ *үшін* $f[g(y)] = y$ *шарттары орындалса, онда анықталу жиыны Е және мәндер жиыны D болатын* $x = g(y)$ *функциясы* $y = f(x)$ *функциясына* ***кері*** *функция деп аталады.*

OXY координаттар жүйесінде $y = f(x)$ пен $x = g(y)$ функцияларының графиктері біреу ғана. Ал $y = f(x)$ пен $y = g(x)$ функцияларының графиктері $y = x$ түзуімен салыстырғанда симметриялы болады.

Теорема. Егер $y = f(x)$ белгілі бір *I* аралығында үзіліссіз болса, онда оның кері функциясы бар болуы үшін, *f* функциясы *I* аралығында монотонды өспелі немесе кемімелі болуы, қажетті және жеткілікті (дәлелдемесіз).

Өзара кері функциялар:

1) $y = x^n$ және $y = \sqrt[n]{x}$, мұнда, $x, y \in R$, $n -$ ***теріс емес тақ сан***;

$y = x^n$ және $y = \sqrt[n]{x}$, мұнда, $x, y \in [0; +\infty)$, $n -$ ***теріс емес жұп сан***;

2) $y = a^x, \ (a > 0, a \neq 1), \ x \in R, \ y \in (0; +\infty)$ және

$$y = \log_a x \ \ (a > 0, a \neq 1), \ \ x \in (0; +\infty), y \in R;$$

3) $y = \sin x, \ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \ \ y \in [-1; +1]$ және

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1; +1], \ \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$y = \cos x, \ \ x \in [0, \pi], \ \ y \in [-1; +1]$ және

$$y = \arccos x, \ \ x \in [-1; +1], \quad y \in [0; \pi];$$

$y = tgx, \ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad y \in R$ және

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in R, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Теорема. $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығында үзіліссіз, өспелі және қандай да бір $x \in (a, b)$ нүктесінде нөлге тең емес ақырлы $f'(x)$ туындысы бар болсын. Онда f функциясына кері $x = f^{-1}(y) = g(y)$ функциясының x-ке сәйкес нүктеде туындысы бар, ол $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ немесе $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ формуласы арқылы анықталады.

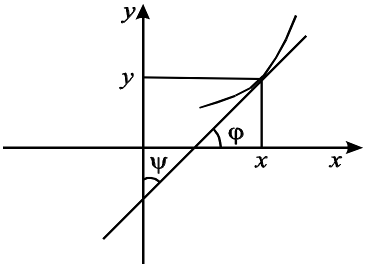
▼ Күрделі функцияны дифференциалдау ережесін пайдала-нып, $x = g[f(x)]$ теңдігінің екі жағында дифференциалдасақ,

$$1 = g'(y) \cdot f'(x) \quad \text{немесе} \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \qquad ▲$$

Бұл теореманың геометриялық мағынасы: $y = f(x)$ қисығына жүргізілген жанаманың сәйкес OX және OY өстерімен жасайтын бұрыштарының тангенстері өзара кері шамалар болады (50-сурет), яғни егер $tg\varphi = f'(x), \quad tg\psi = g'(y)$ болса, онда $tg\psi = \dfrac{1}{tg\varphi}$.

Мысалы: 1) $y = \arcsin x, \quad |x| < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ функциясына кері функция $x = \sin y$ болғандықтан

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$



50-сурет

2) $(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

Ескерту. Мұнда мысалы, $y = \arcsin x, \quad |x| < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ функциясының $|x| < 1$ нүктелерінде ақырлы, ал $x = \pm 1$ нүктелерінде $+\infty$ тең туындылары бар.

Енді туынды формулаларын жинақтап, кесте етіп жазайық.

Туындылар кестесі

1. $c' = 0;$
2. $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \quad x' = 1; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0, a \neq 1; \quad \left(e^x\right)' = e^x;$

4. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$, $a > 0, a \neq 1$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$; 6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;

7. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 8. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

9. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 10. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$; 12. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

13. $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$; 14. $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$;

15. $\left(\operatorname{th} x\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 16. $\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

5.1.7. Параметр арқылы берілген функция және оның туындысы. Айқын емес түрде берілген функцияның туындысы.

y-тің x-ке тәуелділігі t параметрі арқылы

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t \in (a,b) \end{cases} \tag{1}$$

түрінде берілсін. Бұл – (a,b) интервалында $x = \varphi(t)$ функциясына кері функция бар, сондықтан келесі функция анықталған деген сөз

$$y(x) = \psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]. \tag{2}$$

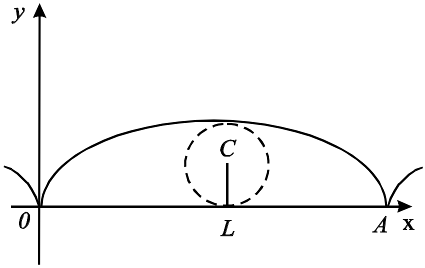
y-тің x бойынша туындысын x пен y-тің t бойынша туындылары арқылы өрнектейік.

Теорема. Егер $\varphi'(t)$ және $\psi'(t)$ бар және $\varphi(t) \neq 0$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданады және $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, $x'_t \neq 0$.

▼ (2) теңдікті кері функцияны дифференциалдау ережесін пайдаланып x бойынша дифференциалдасақ:

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \psi'_t \cdot \frac{1}{\varphi'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$$ аламыз. ▲

Мысал. *OX* өсімен дөңгелеген радиусы *a*-ға тең шеңбер нүктесінің траекториясы **циклоида** деп аталады (51-сурет). Оның параметрлік теңдеуі келесі түрде жазылады: $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in R. \end{cases}$



51-сурет

Көрсетілген қисық ешбір элементар функцияның графигі бола алмайды. Сондықтан $y = f(x)$ функциясының туындысы тек параметрлік түрдегі формуламен есептеледі:

$$f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Егер y пен x айнымалдар арасындағы ***тәуелділік*** $F(x, y) = 0$ теңдеуімен ***айқын емес түрде берілсе***, онда y'_x туындысын табу үшін, қарапайым жағдайларда, $F(x, y) = 0$ теңдеуінің екі жағын y-ті x-тің функциясы деп алып, дифференциалдау керек. Одан соң шыққан теңдеуден y'_x туындысын табу керек. Мысалы, $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ берілсе, онда $3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3y - 3xy' = 0, \quad y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}.$

Ескерту. $F(x,y)=0$ теңдеуімен берілген функция үшін y'_x туындысын табудың басқа әдісін «Көп айнымалды функциялар» тақырыбында көрсетеміз.

§ 5.2. Функция дифференциалы

Анықтама. *Егер f функциясының x нүктедегі* $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ *өсімшесін*

$$f(x+h) - f(x) = A \cdot h + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}(h)} \qquad (1)$$

түрінде өрнектеуге болатын болса, онда оны осы x нүктесінде ***дифференциалданатын функция*** *деп атайды (A шамасы x-ке тәуелді, бірақ h-ке тәуелді емес).* Бұл теңдіктегі $\underset{h\to 0}{\mathrm{o}(h)}$ шамасы, $h \to 0$ ұмтылғанда *h-ке* салыстырғанда реті жоғары ақырсыз кішкене шама, яғни $\dfrac{\mathrm{o}(h)}{h} \to 0, \quad h \to 0.$

Теорема. f функциясы x нүктесінде *дифференциалдануы* үшін, оның x нүктесінде *ақырлы туындысының* бар болуы қажетті және жеткілікті.

▼ **Жеткіліктілігі.** x нүктесінде f функциясының ақырлы туындысы бар болсын: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Онда

$$\frac{\Delta y}{h} = f'(x) + \varepsilon(h) \quad \left(\varepsilon(h) \to 0,\ h \to 0\right) \quad \text{немесе} \quad \Delta y = f'(x)\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h.$$

Бұл $\Delta y = f'(x)h + o(h), \quad h \to 0$ деген сөз, яғни (1) теңдік орындалады $(A = f'(x))$.

Қажеттілігі. x нүктесінде f дифференциалданатын функция болсын, яғни (1) теңдік орындалсын. Онда оның екі жақ бөлігін $h \neq 0$ шамасына бөліп, $\dfrac{\Delta y}{h} = A + \dfrac{\mathrm{o}(h)}{h} = A + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}(1)}$ теңдігін аламыз. Бұл теңдіктен $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = A$ ақырлы туындысының бар екенін көреміз.

Теореманың дәлелдемесінен, *х нүктесінде* ***дифференциалданатын функцияның*** анықтамасындағы (1) теңдікті мына түрде жазуға болатынын көреміз

$$\Delta f(x) = f'(x)\cdot h + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h). \qquad (1')$$

Сонымен, ***бір айнымалды функция үшін оның ақырлы туындысының бар болуы мен дифференциалдануы парапар.***

(1) теңдіктегі бірінші қосылғыш h-ке пропорционал және оған сызықты тәуелді, ал екінші $(\mathrm{o}(h))$ қосылғыш Δx-пен салыстырғанда жоғары ретті ақырсыз кішкене $(h\to 0)$. Бұдан, $A\neq 0$ болса, $h\to 0$ ұмтылғанда екінші қосылғыш бірінші қосылғышқа қарағанда нөлге жылдамырақ ұмтылатынын көреміз. Осыған байланысты $A\cdot h = f'(x)\cdot h$ шамасы функция өсімшесінің ***басты мүшесі*** деп аталады және ол, ***функцияның х нүктесіндегі дифференциалы*** немесе ***бірінші дифференциалы*** деп аталады да dy, $df(x)$ символдарының бірімен (дұрысы: $dy(h)$, $df(x)(h)$) белгіленеді:

$$dy = df(x) = f'(x)\cdot h. \qquad (2)$$

Бұл теңдіктен, *функция дифференциалы* h-ке *(тәуелсіз айнымал өсімшесіне) сызықты тәуелді* екенін көреміз.

52-суретте: *L түзуі* – функцияның графигінің абсциссасы x_0 -ге тең A нүктесіндегі жанамасы;

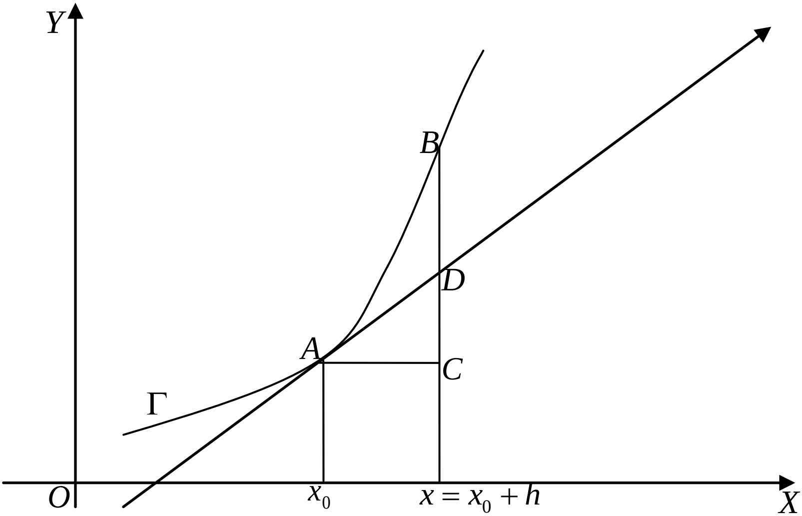
$f'(x_0) = tg\alpha;$ $dy = f'(x_0)\cdot h =$ $tg\alpha\cdot h = CD,$ $= \mathrm{tg}\,\alpha\cdot h = CD,$ яғни, *функция дифференциалы* x *нүктесінде жүргізілген жанаманың* h-*қа сәйкес өсімшесіне тең*;

$$\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h) = \Delta y - dy = DB.$$

Дербес жағдайда, $f(x) = x$ функциясы үшін $dy = dx = x'\cdot h = h$ аламыз. Олай болса, егер аргумент $x-$ тәуелсіз айнымал болса, онда $dx = h,$ яғни ***тәуелсіз айнымалдың дифференциалы оның өсімшесіне тең***. Бұл жағдайда ($x-$ ***тәуелсіз айнымал*** болса) (2) теңдік келесі түрге ие болады:

$$dy = df(x) = f'(x)dx. \qquad (3)$$

Ескерту**:** Егер аргумент $x-$ қандай да бір тәуелсіз айнымал t-ге тәуелді дифференциалданатын функция $x=\varphi(t)$ болса, онда $dx=\varphi'(t)dt.$



52-сурет

(3) теңдіктен $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ аламыз, *яғни функцияның x нүктесіндегі дифференциалының x тәуелсіз айнымалдың дифференциалына қатынасы осы функцияның x нүктесіндегі туындысына тең екендігі шығады.*

Егер $u(x)$, $\vartheta(x)$ функциялары x нүктесінде дифференциалданатын болса, онда келесі теңдіктер орындалады:

$$d(u \pm \vartheta) = du \pm d\vartheta; \qquad d(u \cdot \vartheta) = ud\vartheta + \vartheta du;$$

$$d(cu) = cdu, \ c - \text{тұрақты сан}; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \ \ v \neq 0.$$

Шынында да, мысалы,

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'\cdot dx=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx=\frac{vu'dx-uv'dx}{v^2}=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Егер $u=u(x)$ функциясы x нүктесінде, ал $y=f(u)$ функциясы u нүктесінде дифференциалданса, онда $y=f[u(x)]$ күрделі функциясы үшін $df(u)=f'(u)u'du=f'(u)du$ теңдігі орындалады, яғни $y=f(u)$ үшін u тәуелсіз айнымал болса да немесе басқа бір айнымалдың функциясы болса да, $df=f'(u)du$ теңдігі сақталады екен. Бұл ереже **бірінші дифференциал түрінің инварианттылығы** деп аталады.

$$\Delta y=f'(x)h+\underset{h\to0}{\mathrm{o}(h)}=dy+\underset{h\to0}{\mathrm{o}(h)}$$

теңдігінен
$$\Delta y\approx dy=f'(x)dx \tag{4}$$
немесе
$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)dx \tag{4´}$$
жуық теңдігін жазуға болады және оны жуықтап есептеулерге қолданады. **Мысалы,** егер $\sqrt[3]{8,001}\approx\sqrt[3]{8}=2$ деп алсақ, онда мұндағы жуық есептеу қателігі $y=\sqrt[3]{x}$ функциясының $x=8$ нүктесіндегі $h=0,001$ өсімшесіне сәйкес келетін дифференциалына тең:

$$dy=\left(\sqrt[3]{x}\right)'dx=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 8^{-\frac{2}{3}}\cdot 0,001=\frac{1}{12000}.$$

§ 5.3. Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар

5.3.1. Жоғарғы ретті туындылар.

f функциясының (a,b) аралығында туындысы бар болса, онда ол, әрбір $x\in(a;b)$ нүктесіне $f'(x)$ саны сәйкес келеді деген сөз, яғни туындының өзі $(a;b)$ аралығында анықталған белгілі бір функция болады. Оны ***бірінші туынды*** дейді. Өз кезегінде бірінші туындының да (a,b) аралығында туындысы бар болуы мүмкін. Бұл жағдайда оны

f функциясының ***екінші туындысы*** немесе ***екінші ретті туындысы*** дейді де, $y''=(y')'$ немесе $f''(x)=f^{(2)}(x)=(f'(x))'$ арқылы белгілейді.

Жалпы, f функциясының ($n-1$)-ші ретті туындысының бірінші туындысын f функциясының ***n-ші ретті туындысы*** деп атайды да, $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ немесе $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ деп белгілейді.

Мысалдар. *Келесі теңдіктерді математикалық индукция әдісін пайдаланып дәлелдеуге болады.*

1. $(e^x)^{(n)}=e^x.$ Бұл теңдіктің дұрыстығы көрініп тұр.
2. $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a;$
3. $(x^m)^{(m)}=m!,\quad (x^m)^{(n)}=0,\quad n>m.$
4. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right),\quad n\in N.$
5. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right),\quad n\in N.$

n рет дифференциалданатын $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының қосындысы мен көбейтіндісі үшін келесі дифференциалдау ережесі орындалады:

1. $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)};$

2. Лейбниц формуласы: $(u\cdot v)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=$

$$=u^{(n)}\cdot v+C_n^1 u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+u\cdot v^{(n)}.$$

Мұнда $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!},\qquad 0!=1!=1.$

Мысал: Есептеу керек: $(e^x\cdot x^2)^{(10)}.$

▼ Лейбниц формуласында $u=e^x,\ \ v=x^2$ деп алып, жоғары-дағы 1-ші және 2-ші мысалдарды пайдаланамыз:

$$(e^x \cdot x^2)^{(10)} = (e^x)^{(10)} \cdot x^2 + 10 \cdot (e^x)^{(9)} \cdot (x^2)' + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot (e^x)^{(8)} (x^2)'' +$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} (e^x)^{(7)} \cdot (x^2)''' + \cdots = e^x x^2 + 10 \cdot e^x \cdot 2x + 45 \cdot e^x \cdot 2 =$$

$$= e^x (x^2 + 20x + 90). \quad \blacktriangle$$

5.3.2. Аргументі тәуелсіз функцияның жоғарғы дифференциалы. Егер $y = f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданса, онда $dy = f'(x)dx.$ Өз кезегінде бұл теңдіктің оң жағындағы шама аргумент $x-$тің функциясы ретінде x нүктесінде дифференциалдансын (ол үшін $y = f(x)$ функциясы x нүктесінде екі рет дифференциалданса болғаны). Онда $f'(x)dx$ шамасының дифференциалын қарастыра аламыз: $\delta(dy) = \delta[f'(x)dx]$ (жоғарғы дифференциалдарды анықтау үшін dy және dx символдық белгілеулерімен қоса, δy және δx белгілеулерін де пайдаланамыз).

Анықтама. Бірінші $dy = f'(x)dx$ дифференциалдан алынған $\delta(dy) = \delta[f'(x)dx]$ дифференциалдың мәнін $y = f(x)$ функциясының (x нүктедегі) **екінші дифференциалы** деп атайды және оны $d^2 y$ немесе $d^2 f(x)$ арқылы белгілейді.

Кез келген n ретті $d^n y$ дифференциал индукция бойынша енгізіледі. Айталық, n-1 ретті $d^{n-1} y$ дифференциал енгізілген болсын және $y = f(x)$ функциясы x нүктесінде n рет дифференциалдансын.

Анықтама. «n-1»-ші $d^{n-1} y$ дифференциалдан алынған $\delta(d^{n-1} y)$ дифференциалдың мәнін $y = f(x)$ функциясының ($x-$нүктедегі) ***n*-ші дифференциалы** деп атайды және оны $d^n y$ немесе $f^{(n)}(x)$ арқылы белгілейді.

Біз x – ***тәуелсіз айнымал*** деп аламыз. Онда dx дифференциалы x-ке тәуелді емес және кез келген x нүктесінде $dx = h,$ демек, $(dx)' = h' = 0$ тең болғандықтан $\delta(dx) = (dx)'\delta x = 0$ теңдігінің орындалатынын ескереміз. Мысалы, $d^2y=\delta(dy)\big|_{\delta x=dx}=$

$$=\left\{\delta[f'(x)dx]\right\}_{\delta x=dx}=\left\{\delta\left[f'(x)\right]\cdot dx+f'(x)\cdot\delta(dx)]\right\}_{\delta x=dx}=$$

$$=\left\{\delta[f'(x)]\cdot dx\right\}_{\delta x=dx}=\left\{f''(x)\cdot\delta x\cdot dx\right\}_{\delta x=dx}=f''(x)\cdot(dx)^2.$$

Сонымен,

$$d^2y=f^{(2)}(x)(dx)^2. \qquad (1)$$

Индукция бойынша (x ***- тәуелсіз айнымал*** болғанда)

$$d^ny=f^{(n)}(x)(dx)^n, \quad n=1,2,... \qquad (*)$$

формуласын дәлелдеуге болады. Шынында да, бұл теңдік $n=1$ үшін дұрыс. Оны $n-1$ үшін дұрыс деп ұйғарсақ, онда

$$d^ny=\delta(d^{n-1}y)=\delta[f^{(n-1)}(x)\cdot(dx)^{n-1}]=[f^{(n-1)}(x)\cdot(dx)^{n-1}]'\delta x=$$
$$=f^{(n)}(x)\delta x(dx)^{n-1}=f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Ыңғайлылық үшін $(dx)^n$ дәрежесін dx^n арқылы белгілейді. Онда $(*)$ формула келесі түрде жазылады:

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n, \quad n=1,2,... \ . \qquad (2)$$

(2) формуладан, $y^{(n)}(x)=\dfrac{d^ny}{dx^n}, \quad n=1,2,...$ аламыз, яғни ***аргумент тәуелсіз айнымал болғанда***, $y=f(x)$ функциясының x нүктесіндегі n-ші ретті туындысы осы функцияның x нүктесіндегі n-ші дифференциалы мен аргумент дифференциалының n-ші дәрежесінің қатынасына тең екенін көреміз.

Мысал. $y=2x^4+x^3-7$ функциясының үшінші ретті дифференциалын d^3y табу керек.

▼ Туындыларды есептейміз: $y'=8x^3+3x^2$, $y''=24x^2+6x$, $y'''=48x+6$. Енді (2) формулада n=3 деп аламыз

$$d^3y=y'''dx^3=(48x+6)dx^3. \quad ▲$$

Келесі ережелердің орындалатынын тексеріңіздер:

1) $d^n(u+v)=d^n u+d^n v;$

2) $d^n(u\cdot v)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u\cdot d^k v.$

Ескерту. Егер аргумент қандай да бір тәуелсіз айнымал t-нің n рет дифференциалданатын функциясы болса, онда жоғары дифференциал басқа түрге ие болады. Мысалы, $y=\varphi(z)=\varphi[(\psi(x))]$ күрделі функциясы үшін: $d^2y=d(dy)=d[\varphi'(z)dz]=$

$=d[\varphi'(z)]\cdot dz+\varphi'(z)d(dz)=\varphi''(z)dz^2+\varphi'(z)d^2z,$ яғни аргумент z тәуелді айнымал болса (2) теңдік орындалмайды.

§ 5.4. Туындылары бар функциялар туралы теоремалар

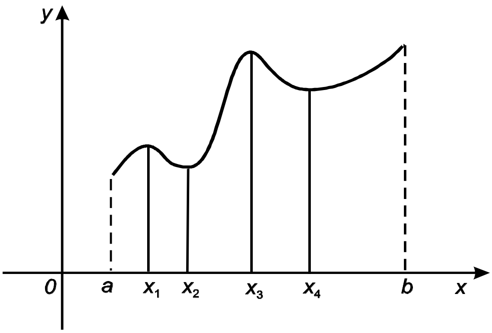
Анықтама. *Егер* $f:D\to R$ функциясының D *анықталу жиынындағы* c *нүкте үшін*

$$\forall x\in U_\delta(c),\quad f(c)\ge f(x), \tag{1}$$

$$(\forall x\in U_\delta(c),\quad f(c)\le f(x)\ ) \tag{1'}$$

теңсіздігі орындалатындай $U_\delta(c)=(c-\delta,c+\delta)$ *маңайы табылса, онда* f *функциясы* $x=c$ *нүктесінде* ***локальді (төңіректік) максимумге (минимумге)*** *ие болады дейді.*

Локальді максимум немесе локальді минимумдерді **локальді экстремум** деп атайды. 53-суретте $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз



53-сурет

функция бейнеленген. x_2 мен x_4 нүктелері f функциясының локальді минимум нүктелері, ал x_1 мен x_3 локальді максимум нүктелері; a мен b локальді экстремум нүктелері бола алмайды (өйткені f бұл нүктелердің толық маңайында анықталмаған), алайда b **локальді біржақты максимум,** a **локальді біржақты минимум** нүктелері деп айтуға болады.

1-теорема (Ферма). Егер f функциясының c нүктесінде кең мағыналы туындысы бар және ол осы нүктеде локальді экстремумге ие болса, онда $f'(c)=0$.

▼ Анықтылық үшін c локальдік максимум нүктесі болсын. Онда $\forall x\in U(c)$, $f(c)\geq f(x)$ болады да, $h>0$, $c+h\in U(c)$ үшін $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$ теңсіздігі орындалады. Олай болса

$$f'(c+)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0. \tag{2}$$

Осы сияқты $h<0$, $c+h\in U(c)$ үшін $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$ болады, сондықтан

$$f'(c-)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0. \tag{3}$$

Теорема шартынан және (2) мен (3) қатыстардан шығатын $0\leq f'(c-)=f'(c)=f'(c+)\leq 0$ теңсіздіктерінен $f'(c)=0$ аламыз. ▲

2-теорема (Ролль). Егер $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, (a,b) интервалында кең мағыналы туындысы бар және $f(a)=f(b)$ болса, онда $f'(\xi)=0$ теңдігі орындалатындай $\xi\in(a,b)$ нүкте табылады.

▼ Егер f функциясы $[a,b]$ кесіндісінде тұрақты болса, онда $\forall\xi\in(a,b)$ үшін $f'(\xi)=0$.

Енді f функциясы $[a,b]$ кесіндісінде тұрақты емес болсын. f функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан, оның $[a,b]\ni x_1$ максимум және $[a,b]\ni x_2$ минимум нүктелері бар (§3.9, 3-теорема). Бұл екі нүктенің екеуі де $[a,b]$ кесіндісінің шеткі нүктелері бола алмайды, өйткені олай болмаса

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(a) = f(b),$$

демек, f функциясы $[a,b]$ кесіндісінде тұрақты болар еді. Сондықтан x_1 мен x_2 нүктелерінің ең болмағанда біреуі (a,b) аралығында жатады. Ол нүктені ξ арқылы белгілейік. Сонымен ξ нүктесінде f локальдік экстремумге ие және теорема шарты бойынша $f'(\xi)$ бар. Олай болса Ферма теоремасы бойынша $f'(\xi)=0$. ▲

1-мысал. $y=|x|,\quad -1\le x\le 1$ функциясы $[-1,1]$ кесіндісінде үзіліссіз және $f(-1)=f(1)$. Алайда бұл функция үшін, $f'(\xi)=0$ теңдігі орындалатындай $\xi\in[-1;1]$ нүктесі болмайтынын көру қиын емес. Бұлай болу себебі, функция $(-1;1)$ интервалында дифферен-циалданбайды, функцияның $x=0\in[-1,1]$ нүктесінде туындысы жоқ.

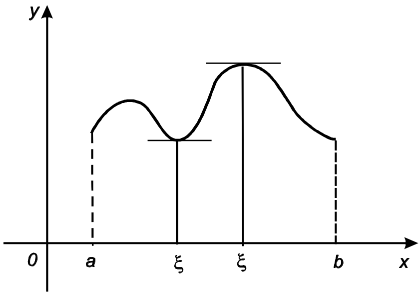
2-мысал. $y=\begin{cases}1, & x=0,\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}$ функциясы $(0,\ 1)$ интервалында дифференциалданады $(f'(x)=1,\ \forall x\in(0;1))$. Сонымен қатар $f(0)=f(1)$. Алайда $f'(\xi)=0$ теңдігі орындалатындай $\xi\in[0;1]$ нүктесі жоқ. Себебі, функция $(0,\ 1)$ интервалында үзіліссіз болғанмен, $[0,1]$ кесіндісінде үзіліссіз емес ($x=0$ – үзіліс нүктесі). Демек, Ролль теоремасында функцияның $[a,b]$ кесіндісіндегі үзіліссіздігін (a,b) интервалындағы үзіліссіздікпен ауыстыруға болмайды екен!

Ролль теоремасының геометриялық мағынасы: $y=f(x)$ функция графигінің $(\xi, f(\xi))$ нүктесіндегі жанамасы, OX осіне параллель болатындай $\xi\in(a,b)$ нүктесі табылады (54-сурет).

3-теорема (Лагранж). Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесін-дісінде үзіліссіз және (a,b) аралығында кең мағыналы туындысы бар болса**,** онда

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), \quad a<c<b \tag{5}$$

теңдігі орындалатындай $c\in(a,b)$ нүктесі табылады.



54-сурет

▼ Келесі көмекші функциядағы

$$F(x)=f(x)-\lambda x, \tag{6}$$

λ санын $F(a)=F(b)$ теңдігі орындалатындай етіп алайық:

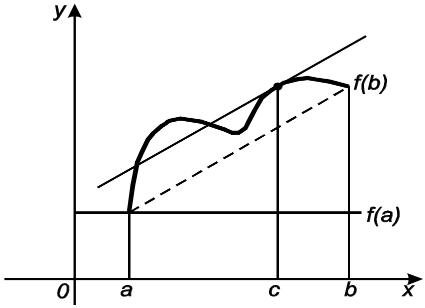
$$F(a)=f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b=F(b), \text{ бұдан } \lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Олай болса, (6) функция $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ түріне ие болады. Бұл F функциясы үшін Ролль теоремасының барлық шарттары орындалады (тексеріңіз). Сондықтан Ролль теоремасы бойынша $F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$ яғни (5) теңдік орындалатын-дай $a<c<b$ нүктесі табылады.. ▲

Лагранж теоремасының мынадай геометриялық мағынасы бар. (5) теңдікті $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ түрінде жазсақ, бұдан қисықтың

$(a,\ f(a))$ мен $(b,\ f(b))$ шеткі нүктелерін қосатын хордамен қисықтың $(c;\ f(c))$ нүктесіндегі жанамасы параллель болатындай $c\in(a,b)$ нүктесі табылатынын көрсетеді (55-сурет).

(5) теңдік **ақырлы өсімшелердің (Лагранж) формуласы** деп аталады. a мен b арасындағы c мәнін $c=a+\theta(b-a),\quad 0<\theta<1$ түрде жазу көп жағдайларда ыңғайлы. Онда Лагранж теоремасы келесі түрде жазылады: $f(b)-f(a)=(b-a)\quad f'\left[a+\theta(b-a)\right],\ 0<\theta<1.$



55-сурет

4-теорема (Коши). Егер $f(x)$ пен $g(x)$ функциялары $[a,\ b]$ кесіндісінде **үзіліссіз,** (a,b) аралығында туындысы бар және $\forall x\in(a,b),\quad g'(x)\neq 0$ болса, онда

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

теңдігі орындалатындай $\xi\in(a,b)$ нүктесі табылады.

▼ Теорема шартынан $g(b)-g(a)\neq 0$ аламыз, өйткені олай болмаса, яғни $g(b)=g(a)$ болса, онда Ролль теоремасы бойынша $g'(\xi)=0$ теңдігі орындалатын $\xi\in(a,b)$ нүктесі табылар еді, ал ол теорема шартына қайшы. Келесі көмекші функцияны қарастырайық: $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot[g(x)-g(a)].$

F функциясы үшін Ролль теоремасының шарттары орындалады: F функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, (a,b) аралығында туындысы бар және $F(a)=F(b)=0.$ Олай болса Ролль теоремасы бойынша $F'(\xi)=0$ болатын $\xi\in(a,b)$ нүктесі табылады:

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)\Big|_{x=\xi}= \; = f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0.$$

Бұдан (4) теңдікті аламыз. ▲

Ескерту. Коши және Лагранж теоремалары $a>b$ үшін де орындалады.

5-теорема. $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және (a,b) аралығында дифференциалданатын функция ***кемімейтін (өспейтін)*** болуы үшін әрбір $x\in\left(a;b\right)$нүктесінде $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) шартының орындалуы, қажетті және жеткілікті.

▼ ***Жеткіліктілігі***. Шынында да, $a\leq x_1<x_2\leq b$ болса, онда $[x_1,x_2]$ кесіндісінде Лагранж теоремасының шарттары орындалады. Олай болса

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\ f'(c),\quad x_1<c<x_2\,, \tag{7}$$

теңдігі орындалатындай $c\in(x_1,x_2)$ нүктесі табылады.

Егер (a,b) аралығында $f'\geq 0$ болса, онда $f'(c)\geq 0$ болады да, (7) теңдіктен $f(x_2)-f(x_1)\geq 0$ немесе $f(x_2)\geq f(x_1),\quad x_2>x_1$ аламыз;

Қажеттілігі. Теорема шарты бойынша, функция кемімейтін болғандықтан, әрбір $x_0<x<b$ нүктесі үшін $f(x)-f(x_0)\geq 0,$ демек $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0,\quad (x_0<x<b)$. Бұдан, функцияның дифференциалданатынын ескерсек $f'(x_0)=f'(x_0+)=\lim\limits_{x\to x_0+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ аламыз. ▲

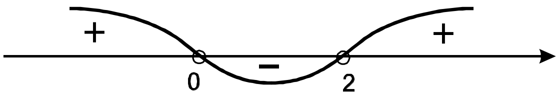
Тұжырым. Егер әрбір $x \in (a;b)$ нүктесінде $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) болса, онда функция (a,b) аралығында өспелі (кемімелі).

▼ (a,b) аралығында $f' > 0$ болса, онда $f'(c) > 0$ болады да, (7) теңдіктен $f(x_2) - f(x_1) > 0$ немесе $f(x_2) > f(x_1)$, $x_2 > x_1$ аламыз. ▲

Кері тұжырым дрыс емес, яғни, берілген интервалда өспелі және дифференциалданатын функцияның туындысы осы интервалда оң болуы міндетті емес. Мысалы, $y = x^3$ функциясы $(-\infty;\ +\infty)$ аралығында өспелі және дифференциалданады, бірақ $f'(0) = 0$.

1-мысал. $y = x^3 - 3x^2 + 1$ функцияның монотонды аралық-тарын табу керек.

▼ Функцияның туындысының таңбасын анықтаймыз: $y' = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x-2)$ (ол суретте көрсетілген). Туынды $(-\infty;0)$ және $(2;+\infty)$ интервалдарында оң: $y'(x) > 0$ болатындықтан, бұл аралықтарда функция өспелі.



Ал $(0;\ 2)$ аралығында функция кемімелі, өйткені $x \in (0;2)$ нүктелерінде $f'(x) < 0$.

Назар аударыңыз! Осы мысалдағы $x = 0$, $x = 2$ нүктелерін монотонды аралықтарға жатқызу немесе жатқызбау туралы сұрақтарды төменде қарастырамыз. ▲

2-мысал. $y = shx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ функциясы $(-\infty;+\infty)$ аралығында үзіліссіз және үзіліссіз дифференциалданады:

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x > 0, \quad \forall x \in (-\infty;+\infty).$$

Сонымен бірге $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$ және $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ теңдіктері орындалады. Демек, $\operatorname{sh} x$ функциясы $(-\infty;+\infty)$ аралығында өспелі. Сондықтан оның бірмәнді үзіліссіз дифференциалданатын кері функциясы бар және оны келесі түрде белгілейді:

$$x = Arshy, \quad -\infty < y < +\infty .$$

6-теорема. Егер функцияның (a,b) интервалындағы туындысы нөлге тең болса, онда ол осы интервалда тұрақты, яғни $f(x)=C.$

▼ $x_1 \in (a, b)$ берілген нүкте, ал $x \in (a,b)$ кез келген нүкте болсын. Онда Лагранж теоремасы бойынша

$$f(x) - f(x_1) = (x - x_1) f'(c) \tag{8}$$

теңдігі орындалатындай x_1 мен x нүктелерінің арасынан c нүктесі табылады (x нүктесі x_1 нүктесінің оң жағында немесе сол жағында болуына байланыссыз, жоғарыдағы ескертуді қараңыз). (a,b) аралығында $f'(x)=0$ болғандықтан $f'(c)=0,$ демек, (8) теңдіктен $\forall x \in (a,b)$ үшін $f(x) = f(x_1) = C.$ ▲

Анықтама. *Егер x_0 нүктесінің қандай да бір $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, \; x_0 + \delta)$ маңайының кез келген $x \neq x_0$ нүктесінде*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \qquad \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \right) \tag{9}$$

теңсіздігі орындалса, онда x_0 ***нүктесінде*** $y = f(x)$ ***функциясы өседі (кемиді)*** *дейді.*

7-теорема. Егер $f'(x_0) > 0 \quad (f'(x_0) < 0)$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде өседі (кемиді).

▼ $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ теңдігі орындалатындықтан, $\varepsilon > 0$ саны берілсе, онда $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір $x \neq x_0$ нүктесі үшін $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$ немесе

$$f'(x_0)-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<f'(x_0)+\varepsilon \qquad (10)$$

теңсіздіктері дұрыс болатын $\delta>0$ санын табуға болады.

Егер $f'(x_0)>0$ болса, онда $\varepsilon<f'(x_0)$ (яғни $f'(x_0)-\varepsilon>0$) болатын $\varepsilon>0$ оң санын таңдап алып, (10) теңсіздіктердің сол жағынан $\forall x\neq x_0,$ $x\in U_\delta(x_0)$ нүктелері үшін $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ теңсіздігі орындалатындай $\delta>0$ санын ($U_\delta(x_0)$ маңайын) табуға болады, яғни f функциясы x_0 нүктесінде өседі;

Егер $f'(x_0)<0$ болса, онда $f'(x_0)+\varepsilon<0$ болатын $\varepsilon>0$ санын таңдап алып (мысалы, $\varepsilon=\frac{-f'(x_0)}{2}>0$) (10) теңсіздіктің оң жағынан $\forall x\neq x_0,\quad x\in U_\delta(x_0)$ үшін $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<\ f'(x_0)-\frac{f'(x_0)}{2}=\ =\frac{f'(x_0)}{2}<0$ теңсіздігі орындалатындай $\delta>0$ санын ($U_\delta(x_0)$ маңайын) табуға болады, олай болса f функциясы x_0 нүктесінде кемиді. ▲

Мысалы: **1)** $f(x)=x^3-3x^2+1$ функциясы (1-*мысалды қараңыз*) үшін $x=0,\ x=2$ нүкетелерінде (9) шарттар орындалмайды: өйткені $x>0$ болса ($\forall x:\ x\neq 0$ нүктелері үшін) $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3-3x^2+1-1}{x}=x(x-3)<0,$ ал $x<0$ болса, $x(x-3)>0.$ (Екінші $x=2$ нүктесінде де (9) шарттар орындалмайтынын тексеріңіз). Демек, $x=0,\ x=2$ нүктелері функцияның өсу (кему) аралығында жатпайды;

2) $f(x)=x^3$ функциясы үшін $f'(x)=3x^2=0,$ яғни $x=0$-стационар нүкте және бұл нүкте маңайындағы $\forall x:\ x\neq 0$ нүктелер үшін $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3-0}{x-0}=x^2>0$ теңсіздігі орындалады. Олай болса, $x=0$ – функцияның өсу аралығында жатады.

Салдар. Егер (a,b) аралығында кемімейтін немесе өспелі f функциясының осы аралықта туындысы бар болса, онда $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geq 0$.

▼ Шынында да, егер $f'(x_0) < 0$ болатындай $x_0 \in (a,b)$ нүктесі бар болса, онда 7-теорема бойынша $x_0 \in (a,b)$ нүктесінде f кемімелі функция болады, ал бұл келтірілген тұжырым шартына қайшы. ▲

Критикалық нүктелердегі функцияның сипаты (қосымша материал)

$y = f(x)$ функциясының туындысы нөлге тең $f'(x)=0$ немесе туындысы жоқ нүктелер оның **критикалық нүктелері** деп аталады.

1) $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 1$ функциясының критикалық (стационар) нүктелері: $f'(x) = 5x^4 - 5x^2 = \; = 5x^2\left(x^2 - 1\right) = 0,\; x_1 = 0,\; x_2 = -1,\; x_2 = 1.$

$x_1 = 0$ нүктесінің $|x| < \frac{5}{3}$ - маңайындағы $\forall x:\; x \neq 0$ нүктелер үшін

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 1 - 1}{x} = \frac{x^5 - \frac{5}{3}x^3}{x} = \frac{x^3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)}{x} = x\left(x^2 - \frac{5}{3}\right) < 0$$

орындалады. Демек, анықтама бойынша, $x_1 = 0$ нүктесінде функция кемиді. Ал, $x_2 = -1,\; x_2 = 1$ - функцияның экстремум нүктелері (§6.1, 1-теорема).

2) $f(x) = \sqrt{|x|}$ функциясының $x = 0$ нүктеде туындысы жоқ. Шынындада,

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{|x|}}{-|x|} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{|x|}}{-\sqrt{|x|^2}} = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{-\sqrt{|x|}} = -\infty;$$

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|^2}} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

Бұл теңдіктерден $x=0$ – функцияның **локальді минимум нүктесі** екенін көреміз (§6.1, 1-теорема): $f(0)=0.$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ функциясы үшін $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\neq 0,\\ +\infty, & x=0\end{cases}$ болғандықтан,

7-теорема бойынша, $x=0$ – функцияның өсу нүктесі.

4) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ функциясының $x=0$ нүктеде туындысы жоқ. Шынында да, $f'(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}==-\infty;$

$$f'(0+)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty.$$

Бұл теңдіктерден $x=0$ - функцияның **локальді минимум нүктесі** екенін көреміз (§6.1, 1-теорема): $f(0)=0.$

5) $f(x)=\begin{cases}3(x-1), & x<1,\\ (x-1), & x\geq 1\end{cases}$ функциясының $x=1$ нүктесінде туындысы жоқ (тексеріңіз). Егер $x<1$ болса, онда $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{3(x-1)-0}{x-1}=3>0;$ ал, $x>1$ болса, онда $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{(x-1)-0}{x-1}=1>0.$ Олай болса, анықтама бойынша, $x=1$ – функцияның өсу нүктесі.

6) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ функциясы үшін $x=0$ – критикалық нүкте. Бірақ бұл өсу нүктесі де, экстремум нүктесі де емес. Өйткені, $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ туындының $x=0$ нүктенің маңайындағы таңбасы тұрақты емес. Сонымен бірге, $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=x\sin\frac{1}{x}$ өрнегінің де $x=0$ нүктенің маңайындағы таңбасы тұрақты емес.

§ 5.5. Лопиталь ережесі

Лопиталь ережесі $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмаған өрнектердің шегін және тағы басқа анықталмағандықтарды алгебралық түрлендірулер көмегімен осы түрлерге келтіріп, оларды функциялардың туындыларының қатынасының шегі арқылы есептеуге әкеледі.

Теорема (Лопиталь ережесі). $f(x)$ пен $g(x)$ функциялары $x=a$ нүктесінің маңайында (a нүктесі алынып тасталуы да мүмкін) анықталған, туындысы бар және

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \text{ немесе } \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

болсын, сонымен бірге a нүктесінің маңайында $g(x)\neq 0,\quad g'(x)\neq 0$ шарттары орындалсын. Егер $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ шегі де бар және келесі теңдік орындалады:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Бұл тұжырым $x\to a+$, $x\to a-$, ***сонымен бірге*** a ***нақты сан немесе ақырсыз*** ($a=\infty$) ***болған жағдайларда да орындалады.***

▼ Теореманы a нақты саны және $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ үшін дәлелдейік (егер $a=\infty$ болса, онда $x=\frac{1}{t}$ ауыстыруы арқылы оны $a=0$ жағдайына келтіреміз).

Егер $f(a)=g(a)=0$ деп алып, f пен g функцияларын жеткізе анықтасақ, онда бұл функциялар a нүктесінде үзіліссіз болады, өйткені $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0=g(a)$. Демек, f пен g функциялары $[a,x]$ кесіндісінде үзіліссіз ($x>a$ немесе $x<a$) және $(a,\ x)$ аралығында дифференциалданатын функциялар. Сондық-тан Коши теоремасы бойынша $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, яғни $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, $\xi\in(a,x)$ теңдігі орындалатын $\xi\in(a,x)$ нүктесі табылады.

Егер $x\to a$ ұмтылса, онда $\xi\to a$ ұмтылады, олай болса теорема шарты бойынша $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\ \text{шек бар болса}\right)$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \blacktriangle$$

Ал $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ жағдайының дәлелдеуін, мысалы, [4] қарауға болады.

1-ескерту. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ шегі бар болса да, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі болмауы мүмкін. Мысалы, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left|\sin x\approx x,\ x\to 0\right|=$

$=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$, бірақ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ шегі жоқ.

2-ескерту. Егер $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ өрнегі де $\dfrac{0}{0}$ немесе $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық болып, $f'(x), g'(x)$ функциялары теорема шартын қанағаттандырса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$.

Бұл теңдіктерді, егер үшінші шек бар болса, онда екінші және бірінші шектер де бар болады деп түсіну керек.

1-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{\alpha^{x}}=0, \alpha>0, a>1.$

▼ Мұнда $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық екенін көреміз. Лопиталь ережесін k рет ($k\geq\alpha$) қолданып, келесі теңдікті аламыз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{\alpha^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\alpha^{x}(\ln a)^{k}}=0. \qquad ▲$$

2-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=0,\ \alpha>0.$

▼ Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha\cdot x^{\alpha}}=0. \qquad ▲$$

Ал $0\cdot\infty$, 0^{0}, ∞^{0}, $\infty-\infty$, 1^{∞} түріндегі анықталмағандықтар алгебралық түрлендірулер арқылы $\dfrac{0}{0}$ немесе $\dfrac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығына келтіріледі.

а) $0\cdot\infty$ анықталмағандығын

$$\left(f(x)\cdot g(x),\ f(x)\to 0,\quad g(x)\to\infty,\ x\to a\right)$$

$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ түрлендіруі $\dfrac{0}{0}$ түріне,

ал $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ түрлендіруі $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріне әкеледі.

3-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\ln x=0,\quad \alpha>0.$

$$\blacktriangledown\ \lim_{x\to 0} x^{\alpha}\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0} x^{\alpha}=0.\ \blacktriangle$$

б) 1^{∞}, 0^0, ∞^0, $(f(x)^{g(x)})$ – анықталмағандықтарын түр-лендірулер арқылы $0\cdot\infty$ түріне (a) жағдайына) келтіруге болады.

4-мысал. $\lim\limits_{x\to 1+}(x-1)^{\ln x}=(0^0)=\lim\limits_{x\to 1+} e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}=$

$$=(0\cdot\infty)=e^{\lim\limits_{x\to 1+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1+}\frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 1+}\frac{-x\ln^2 x}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1+}(-x)\cdot\lim\limits_{x\to 1+}\frac{\ln^2 x}{x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=e^{-\lim\limits_{x\to 1+}\frac{2\ln x}{x}}=e^0=1.$$

в) Ал $\infty-\infty$ $(f(x)-g(x),\ f\to+\infty,\ g\to+\infty\ (x\to a))$ анықтал-мағандығын $\frac{0}{0}$ түріне келтіруге болады:

$$f-g=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}=\frac{0}{0}.$$

5-мысал.

$$\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\right)=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\cos x-\sin x\right)'}{\left(x\sin x\right)'}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-x\sin x\right)'}{\left(\sin x + x\cos x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x+\cos x - x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

§ 5.6. Тейлор формуласы

Көпмүшелікке арналған Тейлор формуласы

Берілген

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{1}$$

көпмүшелігін $x-x_0$ биномы бойынша жіктеу керек болсын (x_0 – берілген сан). Бұл есепті шешу әдістерінің бірі төмендегідей.

$$P(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n \tag{2}$$

арқылы ізделінген жіктелуді белгілеп, $A_0, A_1,..., A_n$ коффициент-терін табайық. (2) теңдікте $x=x_0$ деп алсақ, $A_0=P(x_0)$ аламыз. (2) теңдікті дифференциалдасақ,

$$P'(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+\cdots+n\cdot A_n(x-x_0)^{n-1}$$

шығады да, бұдан $x=x_0$ десек, $A_1=P'(x_0)$ табамыз. Екінші рет дифференциалдаудан соң

$$P''(x)=2A_2+3\cdot 2\cdot A_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)\cdot A_n(x-x_0)^{n-2}$$

шығады да, мұнда $x=x_0$ деп алсақ $A_2=\dfrac{P''(x_0)}{2!}$.

Осы процесті қайталай берсек, келесі жалпы формуланың шығатынын көру қиын емес (оны математикалық индукция әдісімен де дәлелдеуге болады)

$$A_k=\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0,1,2,...,n. \tag{3}$$

Бұл коэффициенттерді (2) теңдікке қойып, көпмүшелікке арналған Тейлор формуласын:

$$P(x)=P(x_0)+P'(x_0)(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\dots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

аламыз. Сонымен,

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (4)$$

1-мысал. $P(x)=1-2x+3x^2-4x^3$ көпмүшелігін (x+1) биномының дәрежесі бойынша жіктеу керек.

▼ Мұнда $x_0=-1$. (3) формуланы пайдаланайық:

$$A_0=P(-1)=10;\ A_1=\frac{P'(-1)}{1!}=\frac{(-2+6x-12x^2)\big|_{x=-1}}{1}=-20;$$

$$A_2=\frac{P''(-1)}{2!}=\frac{(6-24x)\big|_{x=-1}}{2!}=\frac{30}{2}=15.$$

$$A_3=\frac{P'''(-1)}{3!}=\frac{-24}{6}=-4;\quad A_4=A_5=\dots=0.$$

Олай болса,

$1-2x+3x^2-4x^3=10-20(x+1)+15(x+1)^2-4(x+1)^3.$ ▲

2-мысал. $P(x)=(a+x)^n$, $n\in N$, $n\in N$ және $x_0=0$ болсын. Онда (4) формула бойынша, $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k$ және мұнда $P^{(k)}(0)=n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)a^{n-k}$ болғандықтан,

$$(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}x^k \qquad (5)$$

аламыз. Мұнда $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)^{n-k}}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=C_n^k$ теңдігін ескеріп

(5) теңдікті $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k$ түрінде жаза аламыз. Бұл Ньютон биномының формуласы екені белгілі.

Функцияларға арналған Тейлор формуласы. x_0 нүктесінің белгілі бір $U(x_0)$ маңайында $f(x)$ функциясының n-ші ретті үзіліссіз туындысы бар болсын. Жоғарыда қарастырған n-ші дәрежелі ($n \le N$) **Тейлор көпмүшелігін жазайық:**

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k, \quad n \le N \; . \tag{6}$$

$P_n(x)$ көпмүшелігін берілген f функциясының қандай да бір дәлдікпен **жуықтауы (аппроксимациясы)** деп алуға болады. Мұндағы **қателікті** (ол **қалдық мүше** деп аталады) $r_n(x)$ арқылы белгілесек, онда

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x). \tag{7}$$

Енді $x \to x_0$ ұмтылғанда $r_n(x)$ қалдық мүшесі $r_n(x) = \mathrm{o}[(x-x_0)^n]$, яғни $(x-x_0)^n$ -пен салыстырғанда жоғары ретті ақырсыз кішкене шама болатынын (Пеано теоремасы) көрсетейік.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [\, f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \;\;]}{(x-x_0)^n}$$

шегінің астындағы $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ анықталмағандығын ашуға Лопиталь ережесін n рет қолданамыз, ($f^{(n)}(x)$ туындысының үзіліссіздігі ескеріледі)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{\left(x-x_0\right)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \left[f'(x_0) + f''(x_0)\left(x - x_0\right) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}\left(x - x_0\right)^{n-1} \right]}{n\left(x - x_0\right)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - \left[f''(x_0) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} \right]}{n(n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - [f^{(n)}(x_0)]}{n(n-1) \cdots 1} = 0.$$

Олай болса,

$$r_n(x) = \mathrm{o}[(x - x_0)^n]. \tag{8}$$

Сонымен біз келесі теореманы дәлелдедік:

1-теорема. Егер f функциясы x_0 нүктесінің қандай да бір $U(x_0)$ маңайында n рет үзіліссіз дифференциалданса, онда $\forall x \in U(x_0)$ нүктелері үшін келесі теңдік орындалады:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathrm{o}[(x - x_0)^n]. \tag{9}$$

(9) теңдікті **(8) қалдық мүшесі Пеано түріндегі Тейлор формуласы** деп атайды.

Дербес жағдайда $x_0 = 0$ болса, онда (9) теңдік келесі түрге ие болады:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^n). \tag{10}$$

(10) теңдікті **қалдық мүшесі Пеано түріндегі Маклорен формуласы** деп атайды.

Мысал. $f(x)=\sin x$ функциясын $x_0=0$ нүктесінің маңайында үшінші дәрежелі $P_3(x)$ Тейлор көпмүшелігімен аппрокцимациялау керек.

▼ Есептейміз: $f(x)=\sin x,$ $f'(x)=\cos x,$ $f''(x)=-\sin x,$ $f'''(x)=-\cos x,$ бұдан $f(0)=0,$ $f'(0)=1,$ $f''(0)=0,$ $f'''(x)=-1$ аламыз. Енді (10) формуланы пайдалансақ, $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\text{o}(x^4).$ ▲

Егер $U(x_0)$ маңайында функцияның $(n+1)$-ші үзіліссіз туындысы бар болса, онда қалдық мүшені дәлірек жазуға болады.

2-теорема. Егер x_0 нүктесінің $U(x_0)$ маңайында f функциясының $(n+1)$-ші үзіліссіз туындысы бар болса, онда кез келген $x\in U(x_0)$ үшін

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (11)$$

теңдігі орындалатындай, $c\in(x_0,x)$ (немесе $c\in(x,x_0)$) нүктесі табылады.

(11) теңдік **қалдық мүшесі Лагранж түріндегі Тейлор формуласы** деп аталады.

▼ $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n+r_n(x) \qquad (11')$$

теңдігінен $$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=...=r_n^{(n)}(x_0)=0, \qquad (12)$$

ал $(x-x_0)^{n+1}=\varphi(x)$ деп алсақ,

$$\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=...=\varphi^{(n)}(x_0)=0 \qquad (13)$$

болатынын көруге болады (көз жеткізіңіз).

$r_n(x)$ пен $\varphi(x)$ функцияларына $[x_0,x]\supset[x_0,x_1]\supset\cdots\supset[x_0,x_n]$ кесінділерінде Коши теоремасын $(n+1)$ рет қолданамыз ((12); (13)-теңдіктері ескеріледі):

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x)_0}=\frac{r_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)}=\frac{r_n'(x_1)-r_n'(x_0)}{\varphi_n'(x_1)-\varphi_n'(x_0)}=$$

$$=\frac{r''(x_2)}{\varphi''(x_2)}=\cdots=\frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi_n^{(n)}(x_n)}=\frac{r_n^{(n)}(x_n)-r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n)-\varphi^{(n)}(x_0)}=\frac{r_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi_n^{(n+1)}(x_{n+1})},$$

$$x_1\in(x_0,x),\ \ x_2\in(x_0,x_1),\ldots,x_{n+1}\in(x_0,x_n).$$

Енді $\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})=(n+1)!,\quad r_n^{(n+1)}(x_{n+1})=f^{(n+1)}(x_{n+1})-0$ өрнектерін соңғы теңдікке қойып, $\dfrac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$ немесе

$$\left(\varphi(x)=(x-x_0)^{n+1},\quad x_{n+1}=c\right)$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{14}$$

аламыз. Мұндағы $c=x_{n+1}$ нүктесі x_0 мен x нүктелерінің арасында жатыр. (14) пен (11′) теңдіктерінен (11) теңдік алынады. ▲

(11) теңдікте $x_0=0$ болса, онда **қалдық мүшесі Лагранж түріндегі Маклорен формуласын** мына түрде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad c\in(0;x) \tag{15}$$

жазуға болады (мұндағы x оң немесе теріс болуы мүмкін).

Ескерту. Тейлор формуласының қалдық мүшесінің басқа да түрлері бар екені белгілі. Мысалы, Коши түріндегі қалдық мүше:

$$r_n(x)=\frac{(1-\theta)^n\cdot f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}\cdot(x-x_0)^{n+1},\qquad 0<\theta<1.$$

§ 5.7. Негізгі элементар функциялардың Маклорен формуласы

Кейбір негізгі элементар функциялардың Маклорен формулаларын жазайық:

1) $f(x)=e^x$.

▼ Есептейміз: $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$, бұдан

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1,\quad f^{(n+1)}(c)=e^c.$$

Лагранж түріндегі қалдығы бар Тейлор формуласын жазамыз:

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+r_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x);$$

$$r_n(x)=\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!},\quad c\in(0,x).\quad ▲$$

2) $f(x)=\sin x$.

▼ 5.9.п.4-мысалында $f^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $n\in N$, теңдігі көрсетілген еді. Бұл теңдіктен, егер $x=0$ болса, онда

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(0+n\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1,\quad k=0,1,2,\ldots.\end{cases}$$

аламыз. Бұл мәндерді Маклорен формуласына қойсақ,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}+r_{2\nu}(x);$$

$$r_{2\nu}(x)=\frac{\sin[\theta x+(2\nu+1)\frac{\pi}{2}]}{(2\nu+1)!}\cdot x^{2\nu+1},\quad 0<\theta<1.\quad ▲$$

3) $f(x)=\cos x$ функциясы үшін де алдыңғы мысал сияқты келесі теңдікті аламыз:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2k+1}(x);$$

Келесі теңдіктердің дұрыстығын тексеріңіздер:

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x), \quad x > -1:$

5) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \cdots +$

$+\frac{m(m+1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + r_n(x), \quad m \in R.$

Маклорен формуласын қолданып, функция мәнін берілген дәлдікпен есептеуге және есептеу қателігін қалдық мүше арқылы бағалауға болады.

Мысал. $\sqrt{e}$ мәнін $\varepsilon = 0{,}0001$ дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

▼ $y = e^x$ функциясының Маклорен формуласын (мысалы, Лагранж қалдығымен) $x = \frac{1}{2}$ нүктесі үшін жазайық:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + \frac{e^{\frac{c}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Мұнда $0 < c < \frac{1}{2}$, $e^{\frac{c}{2}} < 2$, сондықтан $r_n\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2^n \cdot n!}$.

Бұл теңсіздіктен $n = 5$ үшін: $r_5\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{32 \cdot 720} < 0{,}0001$ аламыз.

Олай болса

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} \approx 1{,}6487.$$ ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Функцияның нүктедегі туындысының және біржақты туындыларының анықтамаларын келтіріңіз. Олардың арасындағы байланысты көрсетіңіз және мысал келтіріңіз.
2. Функцияның берілген нүктедегі ақырлы туындысы мен үзіліссіздігінің арасындағы қатысты түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.
3. Туындының геометриялық және механикалық мағынасын түсіндіріңіз.
4. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ болатын жағдайлардың әрқайсысын мысал (график) арқылы талдап көрсетіңіз.
5. Негізгі элементар функциялардың туындыларын анықтама арқылы есептеңіз.
6. Екі функцияның қосындысының, көбейтіндісінің, бөліндісінің және күрделі функция туындысының формулаларын қорытып
7. шығарыңыз. Мысалдар келтіріңіз.
8. $y = u(x)^{v(x)},\ u > 0$ түріндегі функцияның туындысын есептеу әдісін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.
9. Гиперболалық функциялардың туындыларын жазып, түсіндіріңіз.
10. Кері функцияның, параметр арқылы берілген функцияның, айқын емес түрде берілген функция туындыларының формулаларын жазып, оларға мысалдар келтіріңіз.
11. Функция дифференциалының анықтамасын келтіріңіз. Функцияның берілген нүктеде дифференциалдануының критерийі туралы теореманы дәлелдеңіз.
12. Келесі екі тұжырымның айырмашылығын түсіндіріңіз: ***«Функцияның х нүктесінде туындысы бар»; «Функция х нүктесінде дифференциалданады».***
13. Екі функцияның қосындысының, көбейтіндісінің, бөліндісінің дифференциалының формулаларын жазып, оларды дәлелдеңіз. Дифференциалды жуықтап есептеуге қолданудың негізін түсіндіріңіз.
14. Функцияның жоғарғы ретті туындысы туралы не білесіз? Лейбниц формуласын жазып, оны мысал арқылы түсіндіріңіз.

15. Функцияның жоғарғы ретті дифференциалының формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.
16. Туындылары бар болатын функциялар туралы Ферма, Ролль, Коши, Лагранж теоремаларын тұжырымдаңыз және олардың геометриялық мағыналарын түсіндіріңіз.
17. Туындылары берілген аралықта оң, теріс, нөл болатын функциялардың сипаты туралы теоремаларды тұжырымдаңыз. Мысал келтіріңіз.
18. Лопиталь ережесі туралы теореманы тұжырымдаңыз және оны мысалдар арқылы $0\cdot\infty$, 0^0, $\infty-\infty$, 1^∞ және т.с.с. анықталмағандықтарды ашуға қалай қолдануға болатынын көрсетіңіз.
19. Қалдық мүшесі Пеано түріндегі және қалдық мүшесі Лагранж түріндегі Тейлор формулаларын жазыңыз. Қандай жағдайда бұл формулалар Маклорен формулалары деп аталады?
20. Кейбір негізгі элементар функциялар үшін Маклорен формулаларын келтіріңіз.

5.1-ҮТ
Берілген функцияларды дифференциалдау керек

1.

1.1. $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}.$

1.2. $y = \dfrac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \dfrac{2}{x^4}.$

1.3. $y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2}.$

1.4. $y = 7\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^5} - 3x^3 + \dfrac{4}{x}.$

1.5. $y = 7x + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \dfrac{6}{x}.$

1.6. $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{5}{x}.$

1.7. $y = 3x^5 - \dfrac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \dfrac{10}{x^5}.$

1.8. $y = \sqrt[3]{x^7} + \dfrac{3}{x} - 4x^6 + \dfrac{4}{x^5}.$

1.9. $y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^3}.$

1.10. $y = 4x^6 + \dfrac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \dfrac{7}{x^4}.$

1.11. $y=2\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+3x^2-\frac{2}{x^5}.$

1.12. $y=4x^3-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^2}.$

1.13. $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\frac{1}{x}.$

1.14. $y=\frac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x}+5x^4.$

1.15. $y=\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3.$

1.16. $y=\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7.$

1.17. $y=5x^2+\frac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6.$

1.18. $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}.$

1.19. $y=\sqrt{x^5}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}-3x^3.$

1.20. $y=9x^3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}.$

1.21. $y=3\sqrt{x}+\frac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{7}{x}.$

1.22. $y=\sqrt{x^3}+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3.$

1.23. $y=7x^2+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{8}{x^3}.$

1.24. $y=8x^3-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}.$

1.25. $y=8x-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}.$

1.26. $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}+3x.$

1.27. $y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^4}.$

1.28. $y=4x^5-\frac{5}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{2}{x^3}.$

1.29. $y=\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-\sqrt[5]{x^3}-2x^6.$

1.30. $y=\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}.$

2.

2.1. $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\frac{4}{(x-2)^5}.$

2.2. $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\frac{3}{2x^3-3x+1}.$

2.3. $y=\sqrt{(x-4)^5}+\frac{5}{2x^2+4x-1}.$

2.4. $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\frac{5}{(x-1)^3}.$

2.5. $y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}+\frac{3}{(x-5)^4}.$

2.6. $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\frac{4}{(x+2)^3}.$

2.7. $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\frac{5}{4x^2+3x-5}$. **2.8.** $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\frac{2}{2x^2-3x+7}$.

2.9. $y=\frac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$. **2.10.** $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\frac{3}{(x-3)^5}$.

2.11. $y=\frac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$. **2.12.** $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\frac{4}{(x-4)^4}$.

2.13. $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\frac{8}{(x-5)^2}$. **2.14.** $y=\frac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$.

2.15. $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\frac{4}{7x^2-3x+2}$. **2.16.** $y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\frac{3}{7x^3-x^2-4}$.

2.17. $y=\frac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$. **2.18.** $y=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{8}{6x^2+3x-7}$.

2.19. $y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\frac{3}{(x-3)^4}$. **2.20.** $y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\frac{5}{(x+1)^3}$.

2.21. $y=\sqrt[4]{5x^2-4x+1}-\frac{7}{(x-5)^2}$. **2.22.** $y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\frac{4}{(x-7)^5}$.

2.23. $y=\sqrt{(x-3)^7}+\frac{9}{7x^2-5x-8}$. **2.24.** $y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\frac{2}{1+3x-4x^2}$.

2.25. $y=\frac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$. **2.26.** $y=\frac{3}{x-4}+\sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}$.

2.27. $y=\frac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$. **2.28.** $y=\sqrt{(x-4)^7}-\frac{10}{3x^2-5x+1}$.

2.29. $y=\frac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$. **2.30.** $y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\frac{5}{2x^2-4x+7}$.

3.

3.1. $y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$. **3.2.** $y=\cos^5 3x\cdot tg(4x+1)^3$.

3.3. $y = \mathrm{tg}^4 x \cdot \arcsin 4x^5$.

3.4. $y = \arcsin^3 2x \cdot \mathrm{ctg}\, 7x^4$.

3.5. $y = \mathrm{ctg}\, 3x \cdot \arccos 3x^2$.

3.6. $y = \arccos^2 4x \cdot \ln(x-3)$.

3.7. $y = \ln^5 x \cdot \mathrm{arctg}\, 7x^4$.

3.8. $y = \mathrm{arctg}^3 4x \cdot 3^{\sin x}$.

3.9. $y = 2^{\cos x} \cdot \mathrm{arcctg}\, 5x^3$.

3.10. $y = 4^{-x} \cdot \ln^5(x+2)$.

3.11. $y = 3^{tgx} \cdot \arcsin 7x^4$.

3.12. $y = 5^{x^2} \cdot \arccos 2x^5$.

3.13. $y = \sin^4 3x \cdot \mathrm{arctg}\, 2x^3$.

3.14. $y = \cos^3 4x \cdot \mathrm{arcctg}\sqrt{x}$.

3.15. $y = \mathrm{tg}^3 2x \cdot \arcsin x^5$.

3.16. $y = \mathrm{ctg}^7 x \cdot \arccos 2x^3$.

3.17. $y = e^{-\sin x} \cdot \mathrm{tg}\, 7x^6$.

3.18. $y = e^{\cos x} \cdot \mathrm{ctg}\, 8x^3$.

3.19. $y = \cos^5 x \cdot \arccos 4x$.

3.20. $y = \sin^3 7x \cdot \mathrm{arcctg}\, 5x^2$.

3.21. $y = \sin^2 3x \cdot \mathrm{arcctgx}^5$.

3.22. $y = \cos\sqrt[5]{x} \cdot \mathrm{arctg}\, x^4$.

3.23. $y = \mathrm{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^2$.

3.24. $y = \mathrm{ctg}^3 4x \cdot \arcsin\sqrt{x}$.

3.25. $y = \mathrm{ctg}\frac{1}{x} \cdot \arccos x^4$.

3.26. $y = \mathrm{tg}\sqrt{x} \cdot \mathrm{arcctg}\, 3x^5$.

3.27. $y = \mathrm{tg}^3 2x \cdot \arccos 2x^3$.

3.28. $y = 2^{tgx} \cdot \mathrm{arctg}^5 3x$.

3.29. $y = \sin^5 3x \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

3.30. $y = \cos^4 3x \cdot \arcsin 3x^2$.

4.

4.1. $y = \mathrm{arcctg}^2 5x \cdot \ln(x-4)$.

4.2. $y = \mathrm{arctg}^3 2x \cdot \ln(x+5)$.

4.3. $y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x - 1)$.

4.4. $y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x}$.

4.5. $y = \mathrm{tg}^4 3x \cdot \mathrm{arctg}\, 7x^2$.

4.6. $y = 5^{-x^2} \cdot \arcsin 3x^3$.

4.7. $y = \mathrm{arctg}^5 x \cdot \log_2(x-3)$.

4.8. $y = \log_3(x+5) \cdot \arccos 3x$.

4.9. $y = e^{-x} \cdot \arcsin^2 5x$.

4.10. $y = \log_4(x-1) \cdot \arcsin^4 x$.

4.11. $y = (x-4)^5 \cdot \mathrm{arcctg}\, 3x^2$.

4.12. $y = \mathrm{ctg}^3 4x \cdot \mathrm{arctg}\, 2x^3$.

4.13. $y = e^{-\cos x} \cdot \operatorname{arctg} 7x^5$.

4.14. $y = (x+1)^5 \cdot \arccos 3x^4$.

4.15. $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{arcctg}\ x^4$.

4.16. $y = 3^{-x^3} \cdot \operatorname{arctg} 2x^5$.

4.17. $y = 3^{\cos x} \cdot \arcsin^2 3x$.

4.18. $y = \ln(x-10) \cdot \arccos^2 4x$.

4.19. $y = \lg(x-2) \cdot \arcsin^5 x$.

4.20. $y = \log_3(x+1) \cdot arctg^5 7x$.

4.21. $y = \ln(x+9) \cdot \operatorname{arcctg}^3 2x$.

4.22. $y = \lg(x+2) \cdot \arcsin^2 3x$.

4.23. $y = 4^{-\sin x} \cdot \operatorname{arctg} 3x$.

4.24. $y = 2^{\cos x} \cdot \operatorname{arcctg}^3 x$.

4.25. $y = \lg(x-3) \cdot \arcsin^2 5x$.

4.26. $y = \log_2(x+3) \cdot \arccos^2 x$.

4.27. $y = 2^{-x} \cdot \operatorname{arctg}^3 4x$.

4.28. $y = \ln(x-4) \cdot \operatorname{arcctg}^4 3x$.

4.29. $y = \lg(x+3) \cdot \operatorname{arcctg}^2 5x$.

4.30. $y = \log_5(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^2 x^3$.

5.

5.1. $y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \arcsin 2x^3$.

5.2. $y = (x-2)^4 \cdot \arcsin 5x^4$.

5.3. $y = 2^{-x^3} \cdot \operatorname{arctg} 7x^4$.

5.4. $y = (x+6)^6 \cdot \operatorname{arcctg} 3x^5$.

5.5. $y = 3^{\cos x} \cdot \ln(x^2 - 3x + 7)$.

5.6. $y = \log_2(x-7) \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

5.7. $y = \arccos^3 5x \cdot \operatorname{tgx}^4$.

5.8. $y = (x-5)^7 \cdot \operatorname{arcctg} 7x^3$.

5.9. $y = \arccos\ x^2 \cdot \operatorname{ctg} 7x^3$.

5.10. $y = 5^{-x^2} \cdot \arccos 5x^4$.

5.11. $y = \operatorname{arctg}^4 x \cdot \cos 7x^4$.

5.12. $y = 4(x-7)^6 \cdot \arcsin 3x^5$.

5.13. $y = (x+5)^2 \cdot \arccos^3 5x$.

5.14. $y = 2^{-\sin x} \cdot \arcsin^3 2x$.

5.15. $y = (x+2)^7 \cdot \arccos\sqrt{x}$.

5.16. $y = (x-7)^5 \cdot \arcsin 7x^4$.

5.17. $y = \ln(x-3) \cdot \arccos 3x^4$.

5.18. $y = \log_2(x-4) \cdot \operatorname{arctg}^3 4x$.

5.19. $y = (x-7)^4 \cdot \operatorname{arcctg}^2 7x$.

5.20. $y = \sqrt[3]{x-3} \cdot \arccos^4 2x$.

5.21. $y = \sqrt[3]{x-4} \cdot \arcsin^4 5x$.

5.22. $y = (x-3)^2 \cdot \arccos 3x^6$.

5.23. $y=\sqrt{(x+4)^5}\cdot\arcsin 2x^3.$

5.24. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\arccos 3x.$

5.25. $y=tg^3x\cdot\mathrm{arcctg}\,3x.$

5.26. $y=\sqrt{(x-2)^3}\cdot\mathrm{arctg}(7x-1).$

5.27. $y=\sqrt[5]{(x+4)^2}\cdot\arcsin 7x^2.$

5.28. $y=\arcsin^3 4x\cdot\mathrm{ctg}\,3x.$

5.29. $y=e^{-\cos x}\cdot\arcsin 2x.$

5.30. $y=\sqrt{(x+5)^3}\cdot\arccos^4 x.$

6.

6.1. $y=(x-3)^4\cdot\arccos 5x^3.$

6.2. $y=(3x-4)^3\cdot\arccos 3x^2.$

6.3. $y=sh^3 4x\cdot\arccos\sqrt{x}.$

6.4. $y=\mathrm{th}^2\sqrt{x}\cdot\mathrm{arcctg}\,3x^2.$

6.5. $y=\mathrm{cth}^3 5x\cdot\arcsin 3x^2.$

6.6. $y=\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\mathrm{arctg}(7x+2).$

6.7. $y=\mathrm{ch}^3 4x\cdot\arccos 4x^2.$

6.8. $y=\mathrm{sh}^2 3x\cdot\mathrm{arcctg}\,5x^2.$

6.9. $y=\mathrm{th}^5 3x\cdot\arcsin\sqrt{x}.$

6.10. $y=\mathrm{cth}^2(x+1)\cdot\arccos\left(\frac{1}{x}\right).$

6.11. $y=\mathrm{sh}^4 2x\cdot\arccos x^2.$

6.12. $y=\mathrm{ch}^3(3x+2)\cdot\mathrm{arctg}\,3x.$

6.13. $y=\mathrm{th}^3 4x\cdot\mathrm{arcctg}\,3x^4.$

6.14. $y=\mathrm{cth}^4 7x\cdot\arcsin\sqrt{x}.$

6.15. $y=\mathrm{sh}^3 2x\cdot\arcsin 7x^2.$

6.16. $y=\mathrm{th}^5 4x\cdot\arccos 3x^4.$

6.17. $y=\mathrm{ch}^2 5x\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}.$

6.18. $y=\mathrm{cth}^4 2x\cdot\mathrm{arctg}\,x^3.$

6.19. $y=\mathrm{sh}^4 5x\cdot\arccos 3x^2.$

6.20. $y=\mathrm{ch}^3 9x\cdot\mathrm{arctg}(5x-1).$

6.21. $y=\mathrm{th}^4 x\cdot\mathrm{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right).$

6.22. $y=\mathrm{cth}^3 4x\cdot\arcsin(3x+1).$

6.23. $y=\mathrm{ch}^2 5x\cdot\mathrm{arctg}\,x^4.$

6.24. $y=\mathrm{th}^4 7x\cdot\arccos x^3.$

6.25. $y=\mathrm{cth}\,4x^5\cdot\arccos 2x.$

6.26. $y=\mathrm{cth}\,3x\cdot\arcsin^4 2x.$

6.27. $y=\mathrm{th}^5 3x\cdot\mathrm{arcctg}\sqrt{x}.$

6.28. $y=\mathrm{sh}^4 3x\cdot\arccos 5x^4.$

6.29. $y = \operatorname{cth}^2 4x \cdot \arcsin x^3.$

6.30. $y = \operatorname{th}^3 5x \cdot \operatorname{arcctg}(2x-5).$

7.

7.1. $y = \dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}.$

7.2. $y = \dfrac{(x-4)^2}{e^{arcctg\, x}}.$

7.3. $y = \dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}.$

7.4. $y = \dfrac{e^{-ctgx}}{3x^2-4x+2}.$

7.5. $y = \dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}.$

7.6. $y = \dfrac{e^{tg\,3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}.$

7.7. $y = \dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}.$

7.8. $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}.$

7.9. $y = \dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^3}}.$

7.10. $y = \dfrac{e^{ctg\,5x}}{(x+4)^3}.$

7.11. $y = \dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}.$

7.12. $y = \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-x-7}}.$

7.13. $y = \dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}.$

7.14. $y = \dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}.$

7.15. $y = \dfrac{(2x+5)^3}{e^{tg\,x}}.$

7.16. $y = \dfrac{e^{-tg\,3x}}{4x^2-3x+5}.$

7.17. $y = \dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}.$

7.18. $y = \dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}.$

7.19. $y = \dfrac{e^{-x}}{(2x^2-x+4)^2}.$

7.20. $y = \dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^3}.$

7.21. $y = \dfrac{e^{ctg\,5x}}{(3x-5)^4}.$

7.22. $y = \dfrac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}.$

7.23. $y=\dfrac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$.

7.24. $y=\dfrac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$.

7.25. $y=\dfrac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$.

7.26. $y=\dfrac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$.

7.27. $y=\dfrac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$.

7.28. $y=\dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$.

7.29. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-7}}{e^{-x^3}}$.

7.30. $y=\dfrac{e^{-tgx}}{4x^2+7x-5}$.

8.

8.1. $y=\dfrac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}$.

8.2. $y=\dfrac{\ln(5x-3)}{4\operatorname{tg} 3x^4}$.

8.3. $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{5\cos 42x}$.

8.4. $y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$.

8.5. $y=\dfrac{\cos^2 3x}{\lg(3x-4)}$.

8.6. $y=\dfrac{tg^3 2x}{\lg(5x+1)}$.

8.7. $y=\dfrac{\log_3(4x+5)}{2\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$.

8.8. $y=\dfrac{\ln(7x-3)}{3\operatorname{tg}^2 4x}$.

8.9. $y=\dfrac{\lg(11x+3)}{\cos^2 5x}$.

8.10. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$.

8.11. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{\lg(x+3)}$.

8.12. $y=\dfrac{\sin^3(5x+1)}{\lg(3x-2)}$.

8.13. $y=\dfrac{\cos^4(7x-1)}{\lg(x+5)}$.

8.14. $y=\dfrac{\sin^3(4x+3)}{\ln(7x+1)}$.

8.15. $y=\dfrac{\text{ctg}^3(2x-3)}{\log_3(x+2)}$.

8.16. $y=\dfrac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$.

8.17. $y=\dfrac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$.

8.18. $y=\dfrac{\log_2(7x-5)}{\text{tg}\sqrt{x}}$.

8.19. $y=\dfrac{\log_3(4x-2)}{\text{ctg}\,2x}$.

8.20. $y=\dfrac{\ln^3(x-5)}{\text{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

8.21. $y=\dfrac{\lg(x+1)}{\sin 2x^5}$.

8.22. $y=\dfrac{\text{tg}^3\,7x}{\ln(3x+2)}$.

8.23. $y=\dfrac{\text{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$.

8.24. $y=\dfrac{\text{tg}(3x+7)}{\text{tg}\,3x}$.

8.25. $y=\dfrac{\cos^2 x}{\lg(x^2-2x+1)}$.

8.26. $y=\dfrac{\log_2(3x+7)}{\text{tg}\,3x}$.

8.27. $y=\dfrac{\ln^3 x}{\text{ctg}(x-3)}$.

8.28. $y=\dfrac{\text{tg}^4\,5x}{\ln(x+7)}$.

8.29. $y=\dfrac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$.

8.30. $y=\dfrac{\text{tg}^4\,3x}{\lg(x^2-x+4)}$.

9.

9.1. $y=\dfrac{\text{arcctg}^4\,5x}{\text{sh}\sqrt{x}}$.

9.2. $y=\dfrac{\text{arctg}^3\,2x}{\text{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

9.3. $y=\dfrac{\arccos 3x^4}{\text{th}^2\,x}$.

9.4. $y=\dfrac{\arcsin 5x^3}{\text{ch}\sqrt{x}}$.

9.5. $y=\dfrac{\text{cth}^3(x+1)}{\arccos 2x}$.

9.6. $y=\dfrac{\text{th}\,3x^5}{\text{arctg}^2\,3x}$.

9.7. $y=\dfrac{\arccos^7 2x}{\operatorname{th} x^5}$.

9.8. $y=\dfrac{\arcsin^3 4x}{\operatorname{sh}(3x+1)}$.

9.9. $y=\dfrac{\operatorname{th}^4(2x+5)}{\arccos 3x}$.

9.10. $y=\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{\operatorname{sh}^2 x}$.

9.11. $y=\dfrac{\arcsin^2 4x}{\operatorname{th}(5x-3)}$.

9.12. $y=\dfrac{\operatorname{ch}^2(4x+2)}{\operatorname{arctg} x^3}$.

9.13. $y=\dfrac{\arcsin 4x^5}{\operatorname{th}^3 x}$.

9.14. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}^3(2x+1)}{\operatorname{ch}\sqrt{x}}$.

9.15. $y=\dfrac{\arccos 4x^3}{\operatorname{sh}^4 x}$.

9.16. $y=\dfrac{\operatorname{cth}^2(x-2)}{\arccos 3x}$.

9.17. $y=\dfrac{\operatorname{th}^3(2x+2)}{\arcsin 5x}$.

9.18. $y=\dfrac{\operatorname{cth}^2(3x-1)}{\arccos x^2}$.

9.19. $y=\dfrac{\operatorname{sh}^5 x}{\arccos 4x}$.

9.20. $y=\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}$.

9.21. $y=\dfrac{\operatorname{th}^2(x+3)}{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}$.

9.22. $y=\dfrac{\arcsin^2 3x}{\operatorname{ch}(x-5)}$.

9.23. $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}^3 x}{\operatorname{sh}(2x-5)}$.

9.24. $y=\dfrac{\arccos^3 5x}{\operatorname{th}(x-2)}$.

9.25. $y=\dfrac{\sqrt{\arccos 3x}}{\operatorname{sh}^2 x}$.

9.26. $y=\dfrac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{\operatorname{th} x}}$.

9.27. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\sqrt[3]{\operatorname{cth} x}}$.

9.28. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\operatorname{th}(x+3)}$.

9.29. $y=\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^3 x}}{\operatorname{arcctg} 5x}$.

9.30. $y=\dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ch} 3x}}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

10.

10.1. $y=\dfrac{9\operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$.

10.2. $y=\dfrac{8\operatorname{arctg}(2x+3)}{(x+1)^3}$.

10.3. $y=\dfrac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$.

10.4. $y=\dfrac{9\arcsin(x+5)}{(x-2)^5}$.

10.5. $y=\dfrac{3\operatorname{arcctg}(2x-5)}{(x+1)^4}$.

10.6. $y=\dfrac{2\operatorname{arctg}(3x+2)}{(x-3)^2}$.

10.7. $y=\dfrac{4\arccos 3x}{(x+2)^5}$.

10.8. $y=\dfrac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$.

10.9. $y=\dfrac{7\operatorname{arctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$.

10.10. $y=\dfrac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$.

10.11. $y=\dfrac{2\lg(4x+5)}{(x+6)^4}$.

10.12. $y=\dfrac{5\ln(5x+7)}{(x-7)^2}$.

10.13. $y=\dfrac{4\log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$.

10.14. $y=\dfrac{7\log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$.

10.15. $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$.

10.16. $y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x+1)^7}$.

10.17. $y=\dfrac{5\log_2(x^2+1)}{(x-3)^4}$.

10.18. $y=\dfrac{6\log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$.

10.19. $y=\dfrac{3\log_2(5x-4)}{(x-3)^5}$.

10.20. $y=\dfrac{7\log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$.

10.21. $y=\dfrac{\log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$.

10.22. $y=\dfrac{2\ln(3x-10)}{(x+5)^7}$.

10.23. $y=\dfrac{8\lg(4x+5)}{(x-1)^5}$.

10.24. $y=\dfrac{2\log_3(4x-7)}{(x+3)^4}$.

10.25. $y=\dfrac{3\log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$.

10.26. $y=\dfrac{\lg(x^2+2x)}{(x+8)^4}$.

10.27. $y=\dfrac{3\ln(x^2+5)}{(x-7)^3}$.

10.28. $y=\dfrac{4\log_2(3x-5)}{(x-2)^2}$.

10.29. $y=\dfrac{2\ln(2x^2+3)}{(x-7)^4}$.

10.30. $y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x-5)^3}$.

11.

11.1. $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}}\log_2(x-3x^2)$.

11.2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x-5}{2x+3}}\lg(4x+7)$.

11.3. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}}\ln(5x^2-2x+1)$.

11.4. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}\log_3(x^2+x+4)$.

11.5. $y=\sqrt[6]{\dfrac{7x-4}{7x+4}}\log_5(3x^2+2x)$.

11.6. $y=\sqrt[7]{\dfrac{2x-3}{2x+1}}\lg(7x-10)$.

11.7. $y=\sqrt[8]{\dfrac{5x+1}{5x-1}}\ln(3x-x^2)$.

11.8. $y=\sqrt[9]{\dfrac{x+3}{x-3}}\log_5(2x-3)$.

11.9. $y=\sqrt{\dfrac{6x+5}{6x-5}}\lg(4x+7)$.

11.10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{4x+1}}\ln(2x^3-3)$.

11.11. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+6}{x-6}}\sin(3x^2+1)$.

11.12. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-7}{x+7}}\cos(2x^3+x)$.

11.13. $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-9}{x+9}}\operatorname{tg}(3x^2-4x+1)$.

11.14. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-4}{x+4}}\operatorname{ctg}(2x+5)$.

11.15. $y=\sqrt[8]{\dfrac{x-2}{x+2}}\sin(4x^2-7x+2)$.

11.16. $y=\sqrt[9]{\dfrac{x-3}{x+3}}\cos(x^2-3x+2)$.

11.17. $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{3x+2}}\operatorname{tg}(2x^2-9)$.

11.18. $y=\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-3}}\operatorname{ctg}(3x^2+5)$.

11.19. $y=\sqrt[4]{\frac{x+5}{x-5}}\sin(3x^2-x+4)$. **11.20.** $y=\sqrt[5]{\frac{x-6}{x+6}}\cos(7x+2)$.

11.21. $y=\sqrt[6]{\frac{x-7}{x+7}}\arcsin(2x+3)$. **11.22.** $y=\sqrt[7]{\frac{x-8}{x+8}}\arccos(3x-5)$.

11.23. $y=\sqrt[8]{\frac{x-4}{x+4}}\operatorname{arctg}(5x+1)$. **11.24.** $y=\sqrt[9]{\frac{x-1}{x+1}}\operatorname{arcctg}(7x+2)$.

11.25. $y=\sqrt{\frac{7x-4}{7x+4}}\arcsin(x^2+1)$. **11.26.** $y=\sqrt[3]{\frac{8x-3}{8x+3}}\arccos(x^2-5)$.

11.27. $y=\sqrt[4]{\frac{2x-5}{2x+5}}\operatorname{arctg}(3x+2)$. **11.28.** $y=\sqrt[5]{\frac{3x-4}{3x+4}}\operatorname{arcctg}(2x+5)$.

11.29. $y=\sqrt[6]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\arcsin(2x)$. **11.30.** $y=\sqrt[7]{\frac{x^2+3}{x^2-3}}\arccos(4x)$.

12.

12.1. $y=(\operatorname{cth}3x)^{\arcsin x}$. **12.2.** $y=(\cos(x+2))^{\ln x}$.

12.3. $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$. **12.4.** $y=(th5x)^{\arcsin(x+1)}$.

12.5. $y=(sh(x+2))^{\arcsin 2x}$. **12.6.** $y=(\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

12.7. $y=(\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arcctg}3x}$. **12.8.** $y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$.

12.9. $y=(\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg}7x}$. **12.10.** $y=(\operatorname{sh}3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

12.11. $y=(\operatorname{ch}3x)^{\operatorname{ctg}(1/x)}$. **12.12.** $y=(\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

12.13. $y=(\arccos 5x)^{\ln x}$. **12.14.** $y=(\operatorname{arctg}2x)^{\sin x}$.

12.15. $y=(\ln(x+7))^{\operatorname{ctg}2x}$. **12.16.** $y=(\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$.

12.17. $y=(\operatorname{th}\sqrt{x+1})^{\operatorname{arctg}2x}$. **12.18.** $y=(\operatorname{cth}(1/x))^{\arcsin 7x}$.

12.19. $y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$. **12.20.** $y=(\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$.

12.21. $y=(\sin 4x)^{\operatorname{arctg}(1/x)}$. **12.22.** $y=(\operatorname{tg}3x^4)^{\sqrt{x+3}}$.

12.23. $y=(\operatorname{ctg}2x^3)^{\sin\sqrt{x}}$.

12.24. $y=(\operatorname{tg}7x^5)^{\sqrt{x+2}}$.

12.25. $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$.

12.26. $y=(\operatorname{ctg}7x)^{sh(x+3)}$.

12.27. $y=(\operatorname{sh}5x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

12.28. $y=(\operatorname{arctg}x)^{\operatorname{th}(3x+1)}$.

12.29. $y=(\operatorname{cth}\sqrt{x})^{\sin(x+3)}$.

12.30. $y=(\operatorname{sh}3x)^{\operatorname{arcctg}2x}$.

13.

13.1. $y=(\arccos(x+2))^{\operatorname{tg}3x}$.

13.2. $y=(\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$.

13.3. $y=(\operatorname{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$.

13.4. $y=(\operatorname{arcctg}(3x-3))^{\sin 4x}$.

13.5. $y=(\operatorname{ctg}(3x-2))^{\arcsin 3x}$.

13.6. $y=(\operatorname{tg}(4x-3))^{\arccos 2x}$.

13.7. $y=(\cos(2x-5))^{\operatorname{arctg}5x}$.

13.8. $y=(\sin(7x+4))^{\operatorname{arcctg}x}$.

13.9. $y=(\arcsin 2x)^{\ln(x+3)}$.

13.10. $y=(\arccos 3x)^{\lg(5x-1)}$.

13.11. $y=(\operatorname{arctg}5x)^{\log_2(x+4)}$.

13.12. $y=(\operatorname{arctg}7x)^{\lg(x+1)}$.

13.13. $y=(\log_4(2x+3))^{\arcsin x}$.

13.14. $y=(\log_5(3x+2))^{\arccos x}$.

13.15. $y=(\lg(7x-5))^{\operatorname{arctg}2x}$.

13.16. $y=(\ln(5x-4))^{\operatorname{arcctg}x}$.

13.17. $y=(\log_2(6x+5))^{\arcsin 2x}$.

13.18. $y=(\lg(4x-3))^{\arccos x}$.

13.19. $y=(\ln(7x-3))^{\operatorname{arctg}5x}$.

13.20. $y=(\log_5(2x+5))^{\operatorname{arctg}x}$.

13.21. $y=(\sin(8x-7))^{\operatorname{cth}(x+3)}$.

13.22. $y=(\cos(3x+8))^{\operatorname{th}(x-7)}$.

13.23. $y=(\operatorname{tg}(9x+2))^{\operatorname{ch}(2x-1)}$.

13.24. $y=(\operatorname{ctg}(7x+5))^{\operatorname{sh}3x}$.

13.25. $y=(\operatorname{ch}(3x-7))^{\cos(x+4)}$.

13.26. $y=(\operatorname{ch}(2x-3))^{\operatorname{tg}(x+5)}$.

13.27. $y=(\operatorname{th}(7x-5))^{\sin(x+2)}$.

13.28. $y=(\operatorname{ch}(3x+2))^{\cos(x+4)}$.

13.29. $y=(\ln(7x+4))^{\operatorname{tg}x}$.

13.30. $y=(\lg(8x+3))^{\operatorname{tg}5x}$.

14.

14.1. $y=\dfrac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$.

14.2. $y=\dfrac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$.

14.3. $y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$.

14.4. $y=\dfrac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$.

14.5. $y=\dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

14.6. $y=\dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

14.7. $y=\dfrac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$.

14.8. $y=\dfrac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$.

14.9. $y=\dfrac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$.

14.10. $y=\dfrac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

14.11. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$.

14.12. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3}$.

14.13. $y=\dfrac{\sqrt{(x+2)^3}(x-1)^4}{(x+2)^7}$.

14.14. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^5}(x+3)^2}{(x-7)^3}$.

14.15. $y=\dfrac{\sqrt[4]{x-8}(x+2)^6}{(x-1)^5}$.

14.16. $y=\dfrac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x+8)^3}$.

14.17. $y=\dfrac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$.

14.18. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$.

14.19. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7(x-4)^2}$.

14.20. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}$.

14.21. $y=\dfrac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$.

14.22. $y=\dfrac{(x-1)^6(x+2)^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

14.23. $y=\dfrac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$.

14.24. $y=\dfrac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$.

14.25. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-3}(x+7)^5}{(x-4)^2}$.

14.26. $y=\dfrac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x-1)^5}$.

14.27. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-2)^3}(x-1)}{(x+3)^4}$.

14.28. $y=\dfrac{\sqrt[4]{(x+1)^3}(x-2)^5}{(x-3)^2}$.

14.29. $y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$.

14.30. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$.

5.1-ҮТ шығару үлгісі (5.1.4.-5.1.6. пп)

Берілген функцияларды дифференциалдау керек:

1. $y=9x^5-\dfrac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4.$

► $$y'=\left(9x^5-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4\right)'=$$

$$=9\cdot 5x^4-4\left(-3\right)x^{-4}+\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-3=45x^4+\frac{12}{x^4}+\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-3.$$ ◄

2. $y=\sqrt[4]{\left(2x^2-3x+1\right)^3}-\dfrac{6}{\left(x+1\right)^3}.$

► $$y' = \left(\sqrt[4]{\left(2x^2 - 3x + 1\right)^3} - \frac{6}{(x+1)^3} \right)' =$$

$$= \frac{3}{4}\left(2x^2 - 3x + 1\right)^{-\frac{1}{4}} (4x - 3) - 6(-3)(x+1)^{-4} =$$

$$= \frac{3}{4} \frac{4x - 3}{\sqrt[4]{2x^2 - 3x + 1}} + \frac{18}{(x+1)^4}. \quad ◄$$

3. $y = \mathrm{tg}^5 (x + 2) \cdot \arccos 3x^2.$

► $$y' = \left(\mathrm{tg}^5 (x+2) \cdot \arccos 3x^2 \right)' =$$

$$= 5\,\mathrm{tg}^4 (x+2) \times \frac{1}{\cos^2 (x+2)} \times \arccos 3x^2 + \mathrm{tg}^5 (x+2) \frac{-1}{\sqrt{1 - 9x^4}} \cdot 6x =$$

$$= \frac{5\,\mathrm{tg}^4 (x+2) \times \arccos 3x^2}{\cos^2 (x+2)} - \frac{\mathrm{tg}^5 (x+2) \times 6x}{\sqrt{1 - 9x^4}}. \quad ◄$$

4. $y = \arcsin^5 4x \cdot \log_2 (x - 5).$

► $$y' = \left(\arcsin^5 4x \cdot \log_2 (x-5) \right)' =$$

$$= 5 \arcsin^4 4x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 16x^2}} \cdot 4 \log_2 (x-5) + \arcsin^5 4x \frac{1}{(x-5)\ln 2} =$$

$$= \frac{20 \arcsin^4 4x \cdot \log_2 (x-5)}{\sqrt{1 - 16x^2}} + \frac{\arcsin^4 4x}{(x-5)\ln 2}. \quad ◄$$

5. $y = 3^{-x^4} \mathrm{ctg} 7x^3.$

► $$y' = \left(3^{-x^4} \mathrm{ctg} 7x^3\right)' = 3^{-x^4} \ln 3 \cdot \left(-4x^3\right) \mathrm{ctg}\, 7x^3 + 3^{-x^4} \left(\frac{1}{-\sin^2 7x^3} \right) 21x^2 =$$

$$=-4\ln 3\cdot 3^{-x^4}x^3\operatorname{ctg}7x^3-\frac{21x^3\cdot 3^{-x^4}}{\sin^2 7x^3}. \qquad \blacktriangleleft$$

6. $y=\operatorname{cth}^2 3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}.$

$\blacktriangleright$ $y'=\left(\operatorname{cth}^2 3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'=$

$$=2\operatorname{cth}3x\cdot\left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 3x}\right)\cdot 3\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\operatorname{cth}^2 3x\cdot\frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=-\frac{6\operatorname{cth}3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\operatorname{sh}^2 3x}+\frac{\operatorname{cth}^2 3x}{(1+x)\,2\sqrt{x}}. \qquad \blacktriangleleft$$

7. $y=\dfrac{\sqrt{3x^2-7x+5}}{e^{-x^4}}.$

$\blacktriangleright$ $y'=\left(\dfrac{\sqrt{3x^2-7x+5}}{e^{-x^4}}\right)'=$

$$=\left(\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{x^4}\right)'=\frac{(6x-7)\,e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{x^4}4x^3=$$

$$=\frac{(6x-7)\,e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+4x^3e^{x^4}\sqrt{3x^2-7x+5}. \qquad \blacktriangleleft$$

8. $y=\dfrac{\lg\left(x^2-3x+5\right)}{\operatorname{arcctg}^2 5x}.$

$\blacktriangleright$ $y'=\left(\dfrac{\lg\left(x^2-3x+5\right)}{\operatorname{arcctg}^2 5x}\right)'=$

$$=\frac{1}{\operatorname{arcctg}^4 5x}\left[\frac{(2x-3)\cdot\operatorname{arcctg}^2 5x}{\left(x^2-3x+5\right)\ln 10}+\lg\left(x^2-3x+5\right)\cdot\frac{2\operatorname{arcctg}5x\cdot 5}{1+25x^2}\right]=$$

$$=\left(\frac{(2x-3)\operatorname{arcctg}^2 5x}{\left(x^2-3x+5\right)\ln 10}+\frac{10\lg\left(x^2-3x+5\right)\cdot\operatorname{arcctg}5x}{1+25x^2}\right)\cdot\operatorname{arcctg}^{-4}5x. \quad ◀$$

9. $y=\dfrac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\operatorname{sh}^2 x}$.

▶ $$y'=\left(\frac{\sqrt{\arcsin 3x}}{sh^2 x}\right)'=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin 3x}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3\operatorname{sh}^2 x-2\operatorname{shx}\operatorname{chx}\sqrt{\arcsin 3x}}{\operatorname{sh}^4 x}=$$

$$=\frac{\dfrac{3\operatorname{sh}^2 x}{2\sqrt{\arcsin 3x}\sqrt{1-9x^2}}-\operatorname{sh}2x\sqrt{\arcsin 3x}}{\operatorname{sh}^4 x}. \quad ◀$$

10. $y=\dfrac{\left(3\ln\left(x^2-5\right)\right)}{(x+3)^7}$.

▶

$$y'=\left(\frac{\left(3\ln\left(x^2-5\right)\right)}{(x+3)^7}\right)'=3\frac{\dfrac{1}{x^2-5}\cdot 2x(x+3)^7-7(x+3)^6\ln\left(x^2-5\right)}{(x+3)^{14}}=$$

$$=3\frac{\dfrac{2x(x+3)}{x^2-5}-7\ln\left(x^2-5\right)}{(x+3)^8}. \quad ◀$$

11. $y=\sqrt[7]{\frac{(x+5)}{(x-5)}}\operatorname{ctg}(3x-4).$

► $$y'=\left(\sqrt[7]{\frac{(x+5)}{(x-5)}}\operatorname{ctg}(3x-4)\right)'=$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\frac{x-5-(x+5)}{(x-5)^2}\operatorname{ctg}(3x-4)-\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}\cdot\frac{1}{\sin^2(3x-4)}\cdot 3=$$

$$=-\frac{10}{7}\frac{\operatorname{ctg}(3x-4)}{\sqrt[7]{(x+5)^6(x-5)^8}}-\frac{3}{\sin^2(3x-4)}\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}.$$ ◄

12. $y=\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}.$

► Берілген функцияны көрсеткіштік функция түрінде жазып алып дифференциалдаймыз

$$y'=\left(e^{\ln(3x+2)\cdot\ln th\sqrt{x+2}}\right)'=e^{\ln(3x+2)\cdot\ln th\sqrt{x+2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{3\cdot\ln\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)}{3x+2}+\frac{\ln(3x+2)}{\operatorname{th}\sqrt{x+2}}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\sqrt{x+2}}\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right]=$$

$$=\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}\cdot\left[\frac{3\cdot\ln\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)}{3x+2}+\frac{\ln(3x+2)}{\operatorname{th}\sqrt{x+2}\cdot\operatorname{ch}^2\sqrt{x+2}\cdot 2\sqrt{x+2}}\right].$$

Бұл әдісті басқаша түрде жазып орындауға болады:
Берілген теңдікті логарифмдеп алып туынды табамыз

$$\ln y=\ln(3x+2)\ln\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right),$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{3}{3x+2}\ln\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)+\ln(3x+2)\cdot\frac{1}{\operatorname{th}\sqrt{x+2}}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\sqrt{x+2}}\frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Алынған теңдіктен y' табамыз:

$$y'=\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}\left(\frac{3\ln\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)}{3x+2}+\frac{\ln(3x+2)}{2\sqrt{x+2}\,\operatorname{sh}\sqrt{x+2}\,\operatorname{ch}\sqrt{x+2}}\right).$$

◄

13. $y=(\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}$.

► Жоғарыда көрсетілген әдістің логарифмдік дифференциалдау түрін қолданайық: $\ln y=\operatorname{arctg}(3x-5)\cdot\ln(\sin 7x)$,

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{1+(3x-5)^2}\cdot 3\ln(\sin 7x)+\operatorname{arctg}(3x-5)\cdot\frac{1}{\sin 7x}\cdot 7\cos 7x.$$

$$y'=(\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}\left(\frac{3\ln(\sin 7x)}{1+(3x-5)^2}+7\operatorname{arctg}(3x-5)\cdot\operatorname{ctg}7x\right).$$ ◄

14. $y=\dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{\left((x-1)^2(x+3)^5\right)}$.

► Логарифмдік дифференциалдау әдісін қолданамыз:

$$\ln y=\frac{6}{7}\ln(x+5)-2\ln(x-1)-5\ln(x+3),$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{6}{7(x+5)}-\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x+3},$$

$$y'=\frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}\left(\frac{6}{7(x+5)}-\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x+3}\right).$$ ◄

5.2-ҮТ

1. Табу керек: y', y''.

1.1. $y^2 = 8x.$

1.2. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1.$

1.3. $y = x + \operatorname{arctg} y.$

1.4. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1.$

1.5. $y^2 = 25x - 4.$

1.6. $\operatorname{arcctg} y = 4x + 5y.$

1.7. $y^2 - x = \cos y.$

1.8. $3x + \sin y = 5y.$

1.9. $\operatorname{tg} y = 3x + 5y.$

1.10. $xy = \operatorname{ctg} y.$

1.11. $y = e^y + 4x.$

1.12. $\ln y - \frac{y}{x} = 7.$

1.13. $y^2 + x^2 = \sin y.$

1.14. $e^y = 4x - 7y.$

1.15. $4\sin^2(x + y) = x.$

1.16. $\sin y = 7x + 3y.$

1.17. $\operatorname{tg} y = 4y - 5x.$

1.18. $y = 7x - \operatorname{ctg} y.$

1.19. $xy - 6 = \cos y.$

1.20. $3y = 7 + xy^3.$

1.21. $y^2 = x + \ln(y / x).$

1.22. $xy^2 - y^3 = 4x - 5.$

1.23. $x^2y^2 + x = 5y.$

1.24. $x^4 + x^2y^2 + y = 4.$

1.25. $\sin y = xy^2 + 5.$

1.26. $x^3 + y^3 = 5x.$

1.27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7}.$

1.28. $y^2 = (x - y)/(x + y).$

1.29. $\sin^2(3x + y^2) = 5.$

1.30. $\operatorname{ctg}^2(x + y) = 5x.$

2. Табу керек: y', y''.

2.1. $\begin{cases} x=(2t+3)\cos t, \\ y=3t^3. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+2}, \\ y=(\dfrac{t}{t+2})^2. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=e^{4t}. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[5]{t}. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{(1+t^3)}, \\ y=\dfrac{t^2}{(1+t^2)}. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1}, \\ y=\dfrac{(t+1)}{\sqrt{t^2-1}}. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x=4t+2t^2, \\ y=5t^3-3t^2. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x=\dfrac{\ln t}{t}, \\ y=t\ln t. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x=t^4, \\ y=\ln t. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=4\sin t. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x=5\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln(1+t^2). \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1\cos t). \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t), \\ y = 3(\cos t + t\sin t). \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = (t/(t+1))^2. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x = 5\sin^3 t, \\ y = 3\cos^3 t. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x = ln^2\, t, \\ y = t + lnt. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} x = te^t, \\ y = \dfrac{t}{e^t}. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

3. Функцияның x_0 нүктедегі екінші туындысын $y''(x_0)$ есептеңіз

3.1. $y = \sin^2 x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

3.2. $y = \operatorname{arctg} x,\ \ x_0 = 1.$

3.3. $y = \ln(2 + x^2),\ x_0 = 0.$

3.4. $y = e^x \cos x,\ x_0 = 0.$

3.5. $y = e^x \sin 2x,\ x_0 = 0.$

3.6. $y = e^{-x} \cos x,\ x_0 = 0.$

3.7. $y = \sin 2x,\ \ x_0 = \pi.$

3.8. $y = (2x+1)^5,\ \ x_0 = 1.$

3.9. $y=\ln(1+x),\quad x_0=2.$

3.10. $y=\dfrac{x^2e^x}{2},\ x_0=0.$

3.11. $y=\arcsin x,\quad x_0=0.$

3.12. $y=(5x-4)^5,\quad x_0=2.$

3.13. $y=x\sin x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

3.14. $y=x^2\ln x, x_0=\dfrac{1}{3}.$

3.15. $y=x\sin 2x,\ x_0=-\dfrac{\pi}{4}.$

3.16. $y=x\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{12}.$

3.17. $y=x^4\ln x,\quad x_0=1.$

3.18. $y=x+\operatorname{arctg}x,\quad x_0=1.$

3.19. $y=\cos^2 x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

3.20. $y=\ln(x^2-4),\ x_0=3.$

3.21. $y=x^2\cos x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

3.22. $y=x\arccos x,\quad x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

3.23. $y=(x+1)\ln(x+1),\quad x_0=-\dfrac{1}{2}.$

3.24. $y=\ln^3 x,\quad x_0=1.$

3.25. $y=2^{x^2},\quad x_0=1.$

3.26. $y=(4x-3)^5,\quad x_0=1.$

3.27. $y=x\operatorname{arcctg}x,\quad x_0=2.$

3.28. $y=(7x-4)^6,\quad x_0=1.$

3.29. $y=x\sin 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

3.30. $y=\sin(x^3+\pi),\ x_0=\sqrt[3]{\pi}.$

4. Көрсетілген функцияның *n*-ші ретті туындысының формуласын шығарыңыз

4.1. $y=\ln x.$

4.2. $y=\dfrac{1}{x}.$

4.3. $y=2^x.$

4.4. $y=\cos x.$

4.5. $y=\sin x.$

4.6. $y=\dfrac{1}{x+5}.$

4.7. $y=e^{-2x}.$

4.8. $y=\ln(3+x).$

4.9. $y=\sqrt{x}.$

4.10. $y=xe^{3x}.$

4.11. $y=\dfrac{1}{x-3}.$

4.12. $y=\ln(5+2x).$

4.13. $y=e^{4x}.$

4.14. $y=\dfrac{1}{x-7}.$

4.15. $y=5^x.$

4.16. $y=e^{-5x}.$

4.17. $y=\ln(4+x).$

4.18. $y=\dfrac{1}{x-6}.$

4.19. $y=10^x.$

4.20. $y=7^x.$

4.21. $y=\cos 3x.$

4.22. $y=\ln(3x-5).$

4.23. $y=\dfrac{x}{x+5}.$

4.24. $y=\ln\dfrac{1}{4-x}.$

4.25. $y=\sqrt{x+7}.$

4.26. $y=xe^{6x}.$

4.27. $y=\dfrac{4}{x+3}.$

4.28. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}.$

4.29. $y=\dfrac{1}{1+x}.$

4.30. $y=\ln(5x-1).$

5. Келесі есептерді шығарыңыз.

5.1. $y=x^2-7x+3$ қисығына абсциссасы $x=1$ тең нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу керек.

5.2. $y=x^2-16x+7$ қисығына абсциссасы $x=1$ тең нүктеде жүргізілген нормальдің теңдеуін жазу керек.

5.3. $y=\sqrt{x-4}$ сызығына абсциссасы $x=8$ тең нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу керек.

5.4. $y=\sqrt{x+4}$ сызығына абсциссасы $x=-3$ тең нүктеде жүргізілген нормальдің теңдеуін жазу керек.

5.5. $y=x^3-2x^2+4x-7$ қисығына $(2,1)$ нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу керек.

5.6. $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ қисығына (1,1) нүктеде жүргізілген нормальдің теңдеуін жазу керек.

5.7. $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ қисығына (3,2) нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін табу керек.

5.8. $y^2 = 4x^3$ қисығының қандай нүктесіне жүргізілген жанама $x + 3y - 1 = 0$ түзуіне перпендикуляр болады?

5.9. $y = x^2 - 6x + 2$ қисығына абсциссасы $x = 2$ тең нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу керек.

5.10. $y = \dfrac{x^2}{4} - x + 5$ қисығына абсциссасы $x = 4$ тең нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу керек.

5.11. $y = \dfrac{x^4}{4} - 27x + 60$ қисығына абсциссасы $x = 2$ тең нүктеде жүргізілген нормальдің теңдеуін жазу керек.

5.12. $y = -\dfrac{x^2}{2} + 7x - \dfrac{15}{2}$ қисығына абсциссасы $x = 3$ тең нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу керек.

5.13. $y = 3\,\mathrm{tg}\,2x + 1$ қисығына абсциссасы $x = \dfrac{\pi}{2}$ тең нүктеде жүргізілген нормальдің теңдеуін жазу керек.

5.14. $y = 4\,\mathrm{tg}\,3x$ қисығына абсциссасы $x = \dfrac{\pi}{9}$ тең нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу керек.

5.15. $y = 6\,\mathrm{tg}\,5x$ қисығына абсциссасы $x = \dfrac{\pi}{20}$ тең нүктеде жүргізілген нормальдің теңдеуін жазу керек.

5.16. $y = 4\,\mathrm{tg}\,6x$ қисығына абсциссасы $x = \dfrac{\pi}{18}$ тең нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазу керек.

5.17. $y = \sin 2x$ қисығының қандай нүктесіне жүргізілген жанама Ox өсімен $\dfrac{\pi}{4}$ тең бұрыш жасайды?

5.18. $y = 2x^3 - 1$ қисығының қандай нүктесіне жүргізілген жанама Ox өсімен $\frac{\pi}{3}$ тең бұрыш жасайды?

5.19. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 7x + 9$ қисығының қандай нүктесіне жүргізілген жанама Ox өсімен $\frac{\pi}{4}$ тең бұрыш жасайды?

5.20. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + 4$ қисығының қандай нүктесіне жүргізілген жанама Ox өсімен $\frac{\pi}{4}$ тең бұрыш жасайды?

5.21. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 20x - 7$ қисығының қандай нүктелеріне жүргізілген жанама Ox өсіне параллель болады?

5.22. $y = \frac{x^4}{4} - 7x$ қисығының қандай нүктесіне жүргізілген жанама $y = 8x - 4$ түзуіне параллель болады?

5.23. $y = -3x^2 + 4x + 7$ қисығының қандай нүктесіне жүргі-зілген жанама $x - 20y + 5 = 0$ түзуіне перпендикуляр болады?

5.24. $y = 3x^2 - 4x + 6$ қисығының қандай нүктесіне жүргі-зілген жанама $8x - y - 5 = 0$ түзуіне параллель болады?

5.25. $y = 5x^2 - 4x + 1$ қисығының қандай нүктесіне жүргі-зілген жанама $x + 6y + 15 = 0$ түзуіне перпендикуляр болады?

5.26. $y = 3x^2 - 5x - 11$ қисығының қандай нүктесіне жүргі-зілген жанама $x - y + 10 = 0$ түзуіне параллель болады?

5.27. $y = -x^2 + 7x + 16$ қисығының қандай нүктесіне жүргі-зілген жанама $y = 3x + 4$ түзуіне параллель болады?

5.28. $y = 4x^2 - 10x + 13$ қисығының қандай нүктесіне жүргі-зілген жанама $y = 6x - 7$ түзуіне параллель болады?

5.29. $y = 7x^2 - 5x + 4$ қисығының қандай нүктесіне жүргі-зілген жанама $23y + x - 1 = 0$ түзуіне перпендикуляр болады?

5.30. $y = \frac{x^2}{4} - 7x + 5$ қисығының қандай нүктесіне жүргізілген жанама $y = 2x + 5$ түзуіне параллель болады?

6. Келесі есептерді шығарыңыз

6.1. Дене – кубтық парабола: $12y = x^3$ траекториясы бойынша қозғалады. Оның қандай нүктелерінде өсу жылдам-дығының абсциссалары мен ординаталары бірдей?

Жауабы: $\left(2, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$.

6.2. Материалдық нүктенің қозғалыс заңы: $s = \frac{3t^2}{4} - 3t + 7.$ Уақыттың қандай кезеңінде оның қозғалыс жылдамдығы 2 м/с тең болады? **Жауабы:** $\frac{10}{3}$ с.

6.3. *Ox* өсімен қозғалыс заңдары $x = 4t^2 - 7$ және $x = 3t^2 - 4t + 38$ болатын екі материалдық нүкте қозғалып келеді. Екеуі кездескен сәттен бастап, олар қандай жылдамдықпен бір- бірінен алшақтайды? **Жауабы:** 40 м/с немесе 26 м/с.

6.4. Материалдық нүкте $xy = 12$ гиперболасы бойынша қоз-ғалады. Нүктенің x абсциссасы 1 м/с жылдамдықпен бірқалыпты өсетін болса, оның ординатасы (6,2) орнынан өткенде қандай жылдамдықпен өзгереді? **Жауабы:** $-\frac{1}{3}$ м/с.

6.5. $y^2 = 4x$ параболасының қандай нүктесінде ордината абсциссаға қарағанда екі есе жылдам өседі? **Жауабы:** $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

6.6. Материалдық нүкте $s = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$ заңымен қозға-лады. Нүкте қозғалысының $t = 2c$ сәтіндегі жылдамдығын табу керек. **Жауабы:** 22 м/с.

6.7. Материалдық нүкте $s = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$ заңымен қозғала-ды. Нүкте қозғалысының $t = 2c$ сәтіндегі жылдамдығын табу керек.

Жауабы: 100 м/с.

6.8. Материалдық нүкте $s = 4\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 6$ заңымен қозға-лады. Нүкте қозғалысының $t = \pi\ c$ сәтіндегі жылдамдығын табу керек. **Жауабы:** -1 м/с.

6.9. Материалдық нүкте $s = 4\sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 8$ заңымен қозғала-ды.

Нүкте қозғалысының $t = \frac{\pi}{2}c$ сәтіндегі жылдамдығын табу керек.

Жауабы: $\frac{2}{3}$ м/с.

6.10. Материалдық нүкте $s = -3\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + 10$ заңымен қозғалады. Нүкте қозғалысының $t = \frac{\pi}{3}c$ сәтіндегі жылдамдығын табу керек. **Жауабы:** $\frac{3}{8}$ м/с.

6.11. Материалдық нүкте $s = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7$ заңымен қозғала-ды. Уақыттың қандай сәтінде оның жылдамдығы 42 м/с тең болады?

Жауабы: 3 с.

6.12. Материалдық нүкте $s = 4t^3 - 2t + 11$ заңымен қозғалады. Уақыттың қандай сәтінде оның жылдамдығы 190 м/с тең болады?

Жауабы: 4 с.

6.13. Материалдық нүкте $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t + 7$ заңымен қозғалады. Нүкте қозғалысының $t = 4\,c$ сәтіндегі жылдамдығын табу керек.

Жауабы: 78 м/с.

6.14. Материалдық нүкте $s = 2t^5 - 6t^3 - 58$ заңымен қозғалады. Нүкте қозғалысының $t = 2\,c$ сәтіндегі жылдамдығын табу керек.

Жауабы: 88 м/с.

6.15. *Ox* өсімен қозғалыс заңдары $x = 3t^2 - 8$ және $x = 2t^2 + 5t + 6$ болатын екі материалдық нүкте қозғалып келеді. Екеуі кездескен сәттен бастап, олар бір-бірінен қандай жылдамдықпен алшақтайды? **Жауабы:** 42 м/с немесе 33 м/с.

6.16. *Ox* өсімен қозғалыс заңдары $x = 5t^2 - t + 6$ және $x = 4t^2 + 18$ болатын екі материалдық нүкте қозғалып келеді. Екеуі кездескен сәттен бастап, олар қандай жылдамдықпен бір-бірінен алшақтайды? **Жауабы:** 39 м/с немесе 32 м/с.

6.17. *Ox* өсімен қозғалыс заңдары $x = \frac{4}{3}t^3 - 7t + 16$ және $x = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$ болатын екі материалдық нүкте қозғалып келеді. Уақыттың қай сәтінде олардың жылдамдықтары бірдей болады?

Жауабы: 6 с.

6.18. Материалдық нүктенің қозғалу заңы: $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 11t + 275$. Уақыттың қай сәтінде оның қозғалу жылдамдығы 10 м/с тең болады? **Жауабы:** 7 с.

6.19. Материалдық нүкте $xy = 20$ гиперболасы бойынша қозғалып келеді және оның абсциссасы 1 м/с жылдамдықпен бірқалыпты өседі. Нүкте (4, 5) орнынан өткен мезетте оның ординатасы қандай жылдамдықпен өзгереді? **Жауабы:** –1,25 с.

6.20. $y^2 = 8x$ параболасының қандай нүктесінде ординатасы абсциссаға қарағанда екі есе өседі? **Жауабы:** $\frac{1}{2}, 2$.

6.21. Ox өсімен қозғалыс заңдары $x = 5t^2 + 2t + 6$ және $x = 4t^2 + 3t + 18$ болатын екі материалдық нүкте жылжиды. Екеуі кездескен сәттен бастап, олар бір-бірінен қандай жылдамдықпен алшақтайды? **Жауабы:** 42 м/с немесе 35 м/с.

6.22. $y^2 = 16x$ параболасының қандай нүктесінде ордината абсциссаға қарағанда төрт есе жылдам өседі? **Жауабы:** $\frac{1}{4}, 2$.

6.23. $x^2 = 9y$ параболасының қандай нүктесінде абсцисса ординатаға қарағанда екі есе жылдам өседі? **Жауабы:** $\frac{9}{4}, \frac{9}{16}$.

6.24. $x^2 = 10y$ параболасының қандай нүктесінде абсцисса ординатаға қарағанда бес есе жылдам өседі? **Жауабы:** $1; 0{,}1$.

6.25. Ox өсімен қозғалыс заңдары $x = 2t^3 - 2t^2 + 6t - 7$ және $x = \frac{5}{3}t^3 - t^2 + 14t + 4$ болатын екі материалдық нүкте қозғалып келеді. Уақыттың қай сәтінде олардың жылдамдықтары бірдей болады? **Жауабы:** 4 с.

6.26. Материалдық нүктенің қозғалу заңы: $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 30t + 18$ уақыттың қай сәтінде нүкте жылдамдығы 0-ге тең? **Жауабы:** 6 с.

6.27. Ox өсімен нүкте $x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t - 16$ заңымен қозғалады. Нүктенің жылдамдығын және үдеуін табыңыз. Уақыттың қай сәтінде нүкте қозғалу бағытын өзгертеді?

Жауабы: 2с., 5с.

6.28. Қандай да бір химиялық реакциядан алынған заттың x кг тең массасы мен t уақыттың арасындағы тәуелділік: $x = 7\left(1 - e^{-4t}\right)$. Реакцияның $t = 0\,c$ болғандағы жылдамдығын табу керек. **Жауабы:** 28 кг/с.

6.29. Материалдық нүкте түзу сызықпен қозғалады және $\vartheta^2 = 6x$ (мұнда, ϑ – жылдамдық, x – жүрілген жол). Жылдамдық 6 м/с тең болғандағы нүкте қозғалысының үдеуін табу керек.

Жауабы: $\dfrac{1}{2}$ м/с^2.

6.30. Материалдық нүкте қозғалысының заңы: $s = 3t + t^3$. Оның $t = 2\,c$ сәтіндегі жылдамдығын табыңыз. **Жауабы:** 15 м/с.

5.2-ҮТ шығару үлгілері
(5.1.7п; 5.3.1п; 5.1.2п.)

1. Айқын емес $x^3 y - y^2 = 6x$ түрде берілген функцияның y' және y'' туындыларын табу керек.

► y-ті x-тің функциясы деп алып, теңдіктің екі жағын дифференциалдаймыз және y' табамыз:

$$3x^2 y + x^3 y' - 2yy' = 6, \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{6 - 3x^2 y}{x^3 - 2y}.$$

Алдыңғы теңдікті тағы да дифференциалдаймыз және y'' табамыз:

$$6xy + 3x^2 y' + 3x^2 y' + x^3 y'' - 2y'^2 - 2yy'' = 0,$$

$$y''\left(x^3 - 2y\right) = 2y'^2 - 6x^2 y' - 6xy,$$

$$y'' = 2\frac{\left(6 - 3x^2 y^2\right)^2}{\left(x^3 - 2y\right)^3} - 6x^2\,\frac{6 - 3x^2 y}{\left(x^3 - 2y\right)^2} - \frac{6xy}{x^3 - 2y}. \qquad ◄$$

2. y-тің x-ке тәуелділігі t параметрі арқылы $\begin{cases} x = 3t^4 - t^2, \\ y = t^3 - 5 \end{cases}$ түрінде берілген. y' және y'' табу керек.

► $\begin{cases} x' = 12t^3 - 2t, \\ y' = 3t^2 \end{cases}$ және $\begin{cases} x'' = 36t^2 - 2, \\ y'' = 6t \end{cases}$ болғандықтан,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{12t^3 - 2t} = \frac{3t}{12t^2 - 2},$$

$$y''_x = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^3_t} = \frac{6t\left(12t^3 - 2t\right) - \left(36t^2 - 2\right)3t^2}{\left(12t^3 - 2t\right)^3} =$$

$$= \frac{72\,t^4 - 12\,t^2 - 108t^4 + 6\,t^2}{\left(12t^3 - 2t\right)^3} = -\frac{3\left(6t^2 + 1\right)}{4t\left(6t^2 - 1\right)^3} \text{ болады.} \quad ◄$$

3. $y = \frac{1}{8} - \frac{\cos^2 x}{4}$ функциясы берілген. Табу керек $y'''\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

► Біртіндеп табамыз:

$$y' = \frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4}\sin 2x, \quad y'' = \frac{1}{2}\cos 2x, \quad y''' = -\sin 2x,$$

$$y'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1. \quad ◄$$

4. $y = xe^x$ функциясының n-ші ретті туындысының форму-ласын жазу керек.

► Алғашқы туындыларды есептейміз:

$$y' = e^x + xe^x, \quad y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x,$$

$$y''' = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x.$$

Алынған нәтижелерді салыстыра отырып, келесі теңдікті жазамыз: $y^{(n)} = ne^x + xe^x$. Бұл формуланың дұрыстығын математикалық индукция әдісімен көрсетуге болады. ◄

Ескерту. 5.3.1 п. мысалдарды қараңыз.

5. $y = x^2 - 9x - 4$ қисығына абсциссасы $x = -1$ болатын нүктеде жүргізілген жанама теңдеуін жазу керек.

► Жанасу нүктесінің ординатасы $y(-1) = (-1)^2 - 9\cdot(-1) - 4 = 6;$ функция туындысының жанасу нүктесіндегі мәні $f'(-1) = $ $= (2x-9)\big|_{x=-1} = -11.$ Енді (-1,6) нүкте арқылы өтетін бұрыштық коэффициенті $k = f'(-1) = -11$ тең жанама теңдеуін жазамыз (5.1.2 п. (3) - формула):

$$y - 6 = -11(x+1), \quad y = -11x - 5. \qquad ◄$$

6. Ox өсі бойымен екі материалдық нүкте $x_1 = \frac{t^3}{3} - 4$ және $x_2 = \frac{7t^2}{2} - 12t + 3$ қозғалу заңдылықтары бойынша жылжып келеді. Қай уақыт мезгілінде олардың жылдамдықтары теңеседі?

► Екі нүктенің жылдамдықтарын табамыз: $x_t' = t^2, \quad x_2' = 7t - 12.$ Шарт бойынша $x_1' = x_2'$ болуы керек.

Демек, $t^2 = 7t - 12, \quad t^2 - 7t + 12 = 0, \quad t_1 = 3\,c, \quad t_2 = 4\,c.$ ◄

5.3-ҮТ
Лопиталь ережесін пайдаланып, көрсетілген шектерді табыңыз:

1.

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}.$ **1.2.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2^{\ln x} - x}{x-1}.$

1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}{1-x^2}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cdot\operatorname{ctg}(x-a)$.

1.6. $\lim\limits_{x\to +0} arctgx\cdot\ln x$.

1.7. $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{1/x}-1)x$.

1.8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

1.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{2\sin x + x}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin(\frac{\pi x}{2})}$.

1.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{x}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x^2}-2\operatorname{tg} x}{1-\cos 4x}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$.

1.23. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

1.24. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin(\dfrac{3}{x})$.

1.25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{4x-\sin x}$.

1.29. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

1.30. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$.

2.

2.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}x^4\sin(\dfrac{a}{x})$.

2.3. $\lim\limits_{x\to1}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

2.4. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

2.5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

2.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

2.8. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot\operatorname{tg}(\dfrac{x}{2})$.

2.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to\pi/(2a)}\dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{c^x-1}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{\sin 2x}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to0}(x\ln x)$.

2.20. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2.21. $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})\operatorname{ctg} x.$

2.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}.$

2.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^2 2x}.$

2.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}.$

2.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}.$

2.26. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^5}.$

2.27. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}.$

2.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{ctg(5x/2)}.$

2.29. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)\operatorname{ctg} 4x.$

2.30. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2\sin b/x).$

3.

3.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}.$

3.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}.$

3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}.$

3.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\operatorname{tg} x-x}.$

3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x-\frac{x^2}{2}-1}.$

3.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt[7]{x-3}}.$

3.7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}.$

3.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln(1-x)}.$

3.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{\cos x-1}.$

3.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos ax}{e^{\beta x}-\cos\beta x}.$

3.11. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}.$

3.12. $\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{a}{6x}.$

3.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\,\mathrm{tg}\,4x-12\,\mathrm{tg}\,x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt[4]{\mathrm{tg}\,x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

3.22. $\lim\limits_{x\to \infty}x^2e^{-0.01x}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\log_2 x}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{4/x^2}-1}{\mathrm{arctg}\,x^2-\pi}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 1/2}\ln 2x\cdot\ln(2x-1)$.

3.27. $\lim\limits_{x\to 1/3}\left(\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{1}{\ln 3x}\right)$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\mathrm{ctg}\,x$.

3.29. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^3e^{-x})$.

3.30. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{x-1}$.

4.

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{\mathrm{ctg}\,x}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(\dfrac{1}{x}))^x$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

4.5. $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{\frac{1}{x}}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\frac{\pi x}{2})}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4})^{tg(\frac{\pi x}{2})}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4})^{tg(\frac{\pi x}{2})}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg})^{\sin x}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln)^{\frac{1}{x}}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-e^x)^{\frac{1}{x}}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)^{\frac{1}{\ln(2(x-1))}}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^{x}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}2x\right)^{1/\ln x}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{5}{x^2-x-20}\right)$.

4.27. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\frac{a}{x}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\frac{\pi x}{2})}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

5.

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(2+x)-\ln(x+1))$.

5.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}+\lambda\sin\dfrac{m}{x}\right)^{x}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3tg^{2}x\right)^{ctg^{2}x}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{\sqrt{x}}\right)^{x}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^{2}}}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\operatorname{ctg}x\right)^{\operatorname{tg}x}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2a})}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg}x\right)^{2x-\pi}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x-\pi}}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x-1\right)^{e^{1/(x-1)}}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-2}\right)^{x^{2}}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 0} x^{3/(4+\ln x)}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}\right)^{1/(x-2)}$.

Келесі есептерде дифференциал көмегімен берілген шамаларды есептеңіз және жіберілген салыстырмалы қателікті (үтірден соңғы екі орынды белгіге дейінгі дәлдікпен) бағалаңыз

6.

6.1. $\sqrt[5]{64}$.

6.2. $\sqrt[3]{26{,}19}$.

6.3. $\sqrt[4]{16{,}64}$.

6.4. $\sqrt{8{,}76}$.

6.5. $\sqrt[5]{31}$.

6.6. $\sqrt[3]{70}$.

6.7. $\left(2{,}01\right)^3+\left(2{,}01\right)^2$.

6.8. $\sqrt[3]{65}$.

6.9. $2{,}9/\sqrt{\left(2{,}9\right)^2+16}$.

6.10. $\sqrt{\dfrac{4-3{,}02}{4+3{,}02}}$.

6.11. $\sqrt[4]{15{,}8}$.

6.12. $\sqrt[3]{10}$.

6.13. $\sqrt[5]{200}$.

6.14. $\left(3{,}03\right)^5$.

6.15. $\sqrt{\dfrac{\left(2{,}037\right)^2-3}{\left(2{,}037\right)^2+5}}$.

6.16. $\sqrt[7]{130}$.

6.17. $\sqrt[3]{27,5}$.

6.18. $\sqrt{17}$.

6.19. $\sqrt{640}$.

6.20. $\sqrt{1,2}$.

6.21. $\sqrt[10]{1025}$.

6.22. $(3,02)^4 + (3,02)^3$.

6.23. $(5,07)^3$.

6.24. $(4,01)^{1,5}$.

6.25. $\sqrt[3]{1,02}$.

6.26. $\cos 151^0$.

6.27. $\text{arctg}\, 1,05$.

6.28. $\cos 61^0$.

6.29. $\text{tg}\ 44^0$.

6.30. $\text{arctg}\ 0,98$.

7.

7.1. $\arcsin\ 0,6$.

7.2. $\text{arctg}\ 0,95$.

7.3. $e^{0,2}$.

7.4. $\lg 11$.

7.5. $\arcsin 0,54$.

7.6. $\cos 59^0$

7.7. $e^{2,01}$.

7.8. $\ln\ \text{tg}\, 46^0$.

7.9. $\text{arctg}\ \sqrt{1,02}$.

7.10. $\text{arctg}\ \sqrt{0,97}$.

7.11. $\text{arctg}\, 1,01$.

7.12. $\ln(e^2 + 0,2)$.

7.13. $\text{arctg}\, 1,03$.

7.14. $\ln\ \text{tg}\, 47^0 15'$.

7.15. $\lg 9,5$.

7.16. $\text{arctg}\ \sqrt{3,1}$.

7.17. $2^{2,1}$.

7.18. $4^{1,2}$.

7.19. $\mathrm{tg}\,59^0$.

7.20. $\log_2 1{,}9$.

7.21. $\mathrm{arctg}\,\sqrt{3{,}2}$.

7.22. $\mathrm{ctg}\,29^0$.

7.23. $\sin 93^0$.

7.24. $\lg 1{,}5$.

7.25. $\sin 29^0$.

7.26. $\lg 101$.

7.27. $\sin 31^0$.

7.28. $\lg 0{,}9$.

7.29. $e^{0{,}25}$.

7.30. $\sqrt{15}$.

5.3-ҮТ шығару үлгісі (§ 5.5, § 5.2)

Келесі есептерде Лопиталь ережесін пайдаланып, көрсетілген шекті табу керек:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{3x-1}}$.

▼ $x\to\infty$ ұмтылғанда шек астындағы бөлшектің алымы және бөлімі ақырсыздыққа ұмтылатындықтан, $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандыққа келеміз. Демек, Лопиталь ережесін қолдануға болады (§5.5, (1))

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{3x-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(2x)}{\left(x^2+1\right)}}{\dfrac{3}{5}\sqrt[5]{(3x-1)^{-4}}}=\frac{10}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[5]{(3x-1)^4}}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\frac{10}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{(3x-1)^4}+x\left(\frac{4}{5}\right)(3x-1)^{-\frac{1}{5}}\cdot 3}{2x}=\frac{10}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{15x-5+12x}{10x\sqrt[5]{3x-1}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{27x-5}{x\sqrt[5]{3x-1}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{27-\frac{5}{x}}{\sqrt[5]{3x-1}}=0. \quad ▲$$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

▼ $x\to\frac{\pi}{2}$ ұмтылғанда, $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандыққа келеміз. Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{2\operatorname{tg}2x\frac{2}{\cos^2 2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos^2 2x\cdot\cos x}{4\sin 2x}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\cos^3 2x\right)\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sin x}=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}. \quad ▲$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}4x}{e^{5x}-1}$.

▼ $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты Лопиталь ережесін қолданып ашамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}4x}{e^{5x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{\left(1+16x^2\right)}}{5e^{5x}}=\frac{4}{5}. \quad ▲$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2-\sqrt{4+x^2}}-\frac{3}{\sqrt{16+x-4}}\right)$.

▼ Мұндағы $\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандықты түрлендіру арқылы $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандыққа әкелеміз:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2-\sqrt{4+x^2}}-\frac{3}{\sqrt{16+x-4}}\right)=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{16+x}-4-6+3\sqrt{4+x^2}}{\left(2-\sqrt{4+x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{16+x-4}\right)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\left(2\sqrt{16+x}\right)}+\frac{3x}{\sqrt{4+x^2}}}{-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\left(\sqrt{16+x-4}\right)+\frac{1}{2\sqrt{16+x}}\left(2-\sqrt{4+x^2}\right)}=\frac{\frac{1}{8}}{0}=\infty.$$ ▲

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x$.

▼ Мұнда 1^{∞} түріндегі анықталмағандық тұр. Келесі белгі-леуді енгіземіз: $y=\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x$. Онда $\ln y = x\ln\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}$,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-x-3}{x^2+3x-4}\cdot\frac{(2x+3)\left(x^2-x-3\right)-(2x-1)\left(x^2+3x-4\right)}{\left(x^2-x-3\right)^2}}{-x^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-x^2\left(2x^3-2x^2-6x+3x^2-3x-9-2x^3-6x^2+8x+x^2+3x-4\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\left(x^2+3x-4\right)\cdot\left(x^2-x-3\right)\right)^{-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2\left(-4x^2+2x-13\right)}{\left(x^2+3x-4\right)\cdot\left(x^2-x-3\right)}=4.$$

Сонымен

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x=4,\quad \text{сонда}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x=e^4.\ \blacktriangle$$

Келесі есептерде берілген шаманы дифференциал арқылы жуық түрде есептеу керек және жіберілген салыстырмалы қателікті үтірден кейінгі екі белгіге дейінгі дәлдікпен бағалау керек.

6. $\sqrt[3]{84}$.

$\blacktriangledown$ $\sqrt[3]{84}=\sqrt[3]{4^3+20}$ деп алып $y=\sqrt[3]{x}$ функциясын енгіземіз. Мұнда $x=x_0+\Delta x;\ x_0=64,\ \Delta x=20.$ Енді §4.2, (4′)-формуласын қолданамыз: $y\left(x_0+\Delta x\right)\approx y\left(x_0\right)+y'\left(x_0\right)\Delta x.$

$$y\left(x_0\right)=\sqrt[3]{64}=4,\quad y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\quad y'(64)=\frac{1}{3\cdot 16}=\frac{1}{48}.\qquad \sqrt[3]{84}\approx 4+\frac{20}{48}=4,42.$$

Салыстырмалы қателік: $\delta=\dfrac{4,42-4,00}{4,00}\cdot 100\%=10,5\%.$

7. $\operatorname{arctg} 0,98.$ Жоғарыдағы схеманы ұстанамыз:

$$y=\operatorname{arctg}x,\ x_0=1,\quad \Delta x=0,98-1=-0,02,$$

$$y\left(x_0\right)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},\quad y'=\frac{1}{1+x^2},\quad y'(1)=0,5,$$

$$\operatorname{arctg}0,98\approx\frac{\pi}{4}-0,5\cdot 0,02=0,77,\qquad \delta=\left|\frac{0,77-0,78}{0,78}\right|\cdot 100\%=1,3\%.$$

6. ФУНКЦИЯЛАРДЫ ТУЫНДЫЛАР АРҚЫЛЫ ЗЕРТТЕУ

§ 6.1. Функциялардың локальді экстремумдері

Функцияның локальді экстремумдерінің анықтамаларын еске түсірейік (§5.4 қараңыз).

Егер $f:E\to R$ функциясының анықталу аймағындағы $c\in E$ нүктесінің $U_\delta(c)=(c-\delta,\ c+\delta)$, маңайының барлық x нүктелері үшін $f(x)\le f(c)$ $\left(f(x)\ge f(c)\right)$ теңсіздігі орындалатындай $U_\delta(c)$ маңайы табылса, яғни

$$\forall x\in(c-\delta,\ c+\delta),\quad f(x)\le f(c) \tag{1}$$

$$(\forall x\in(c-\delta,\ \ c+\delta),\qquad f(x)\ge f(c)\ ) \tag{2}$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta>0$ саны бар болса, онда $y=f(x)$ функциясы c нүктесінде **локальді максимум** (**локальді минимум**) мәнін қабылдайды, дейді. Бұл жағдайда, c – функцияның локальді максимум (минимум) нүктесі, дейді.

Егер (1) және (2) шарттарды

$$\forall x\in(c-\delta,\ \ c+\delta),\qquad f(x)<f(c) \tag{1$'$}$$

$$(\forall x\in(c-\delta,\ \ c+\delta),\qquad f(x)>f(c)\,) \tag{2$'$}$$

шарттарымен ауыстырсақ, онда c **локальді қатаң максимум** (**локальді қатаң минимум**) **нүктесі** деп аталады.

Енді функцияның локальді экстремумдерін табу сұрақтарын қарастырайық.

Анықтама. *Егер* $f:E\to R$ функциясы $x_0\in E$ *нүктесінде үзіліссіз және* $f'(x_0)=0$ *теңдігі орындалса немесе* $f'(x_0)$ *туындысы жоқ болса, онда* x_0 *нүктесін* $f:E\to R$ *функциясының* ***критикалық*** *немесе* ***күдікті нүктесі*** *деп атайды.*

Бұдан, f функциясының экстремум нүктесі – оның күдікті нүктесі болатынын көреміз (егер x_0 - экстремум нүкте болса, онда Ферма теоремасы бойынша бұл нүктеде $f'(x_0)=0$, немесе $f'(x_0)$ туынды жоқ).

Бұған кері тұжырым орындала бермейді, яғни, функция күдікті нүктеде экстремумге ие болмауы мүмкін. Мысалы, $y=x^3$ функциясы үшін $x_0=0$ күдікті нүкте: $f'(0)=3x^2\Big|_{x=0}=0.$ Бірақ $x_0=0$ функцияның экстремум нүктесі емес, $y=x^3$ функциясы кез келген $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ нүктелерде өспелі.

Сонымен, x_0 *функцияның экстремум нүктесі болуы үшін, оның күдікті нүкте болуы* ***жеткілікті емес*** *екен.*

Енді экстремумнің жеткілікті шарттарын келтірейік.

x_0- критикалық нүкте болсын.

1-теорема (***экстремумның жеткілікті шарты***). $y=f(x)$ функциясы $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ кесіндісінде үзіліссіз және $(x_0-\delta;\ x_0)$, $(x_0;\ x_0+\delta)$ аралықтарында дифференциалданатын болсын.

Егер $(x_0-\delta;\ x_0)$ және $(x_0;\ x_0+\delta)$ аралықтарында $f'(x)$ туындысының таңбалары қарама-қарсы болса, онда x_0 – экстремум нүктесі. Атап айтқанда,

а) егер $\forall x\in\ x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ үшін $f'(x)>0,$ ал $\forall x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ үшін $f'(x)<0$ болса, онда x_0 – локальді қатаң максимум нүктесі;

б) егер $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$, $f'(x)<0,$ ал $x\in(x_0;\ x_0+\delta),$ $f'(x)>0$ болса, онда x_0 – локальді қатаң минимум нүктесі;

в) $(x_0-\delta,\ x_0)$ және $(x_0;\ x_0+\delta)$ аралықтарында $f'(x)$ таңба-сы бірдей болса, онда x_0 нүктесінде локальді экстремум жоқ.

▼ а)-ны дәлелдейік. f функциясы $[x_0-\delta;\ x_0]$ кесіндісінде **үзіліссіз** және $f'(x)>0$ болғандықтан, (§4.4 5-теорема), осы кесіндіде функция өспелі, яғни

$$x_0-\delta\le x\le x_0,\qquad f(x)<f(x_0). \tag{3}$$

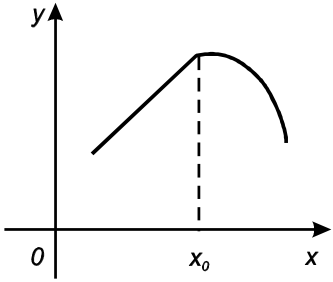
Ал f функциясы $[x_0;\ x_0+\delta]$ кесіндісінде үзіліссіз және $f'(x)<0$ болғандықтан (§5.4, 5-теорема), осы кесіндіде функция кемімелі, яғни

$$x_0\le x\le x_0+\delta\,,\qquad f(x_0)>f(x)\,. \tag{4}$$

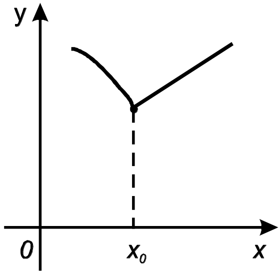
(3) пен (4) теңдіктерден $\forall x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta),\quad f(x)<f(x_0)$

аламыз, яғни f функциясы x_0 нүктесінде локальді қатаң максимумге ие болатынын көреміз.

б) мен в) жағдайларын дәлелдеуді өздеріңізге ұсынамыз. ▲



56-сурет



57-сурет

Сонымен 1-теорема бойынша x-тің өсу бағытымен x_0 нүктесі арқылы өткенде функция ***туындысының таңбасы***: «+»-тен «–»-ке өзгерсе, онда x_0 функцияның локальді қатаң максимум нүктесі (56–сурет); ал ол «–»-тен «+»-ке өзгерсе, онда x_0 – функцияның локальді қатаң минимум нүктесі (57-сурет).

Назар аударыңыз. Мұнда $f'(x_0)$ *туындысының бар болуы туралы талап жоқ, бірақ f функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз* (56-57 *суреттегі мысалдар осы жағдайларды көрсетеді*).

(*145 б. қосымша материалды оқып-тоқуды кеңес етеміз!*)

1-мысал. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ функциясының экстремум нүктелерін табу керек.

▼ $y' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0$ теңдігінен $x_0 = 0$ күдікті нүкте екенін көреміз. Функция $x_0 = 0$ нүктесінде үзіліссіз. Мұнда $x < 0$ болса $y' > 0,$ ал $x > 0$ болса $y' < 0,$ яғни $x_0 = 0$ нүктесі арқылы өткенде функция туындысының таңбасы «+»-тен «–»-ке өзгереді. Демек, 1-теорема бойынша $x_0=0$ – функцияның локальді қатаң максимум нүктесі. ▲

Ескерту. 1-теоремаға кері тұжырым орындала бермейді, яғни, функцияның туындысы қарама қарсы таңбаға ие болатын экстремум нүктенің маңайы жоқ болуы мүмкін ($[1]$, §4.17, 3-мысалды қараңыз).

Бұдан кейін «локальді экстремум нүктелері» деп «локальді қатаң экстремум нүктелерін» атайтын боламыз.

2-теорема. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде *екінші ретті туындысы бар* және $f'(x_0)=0$ болсын. Онда

1) егер $f''(x_0)>0$ болса, онда x_0 локальді минимум нүктесі;

2) егер $f''(x_0)<0$ болса, онда x_0 локальді максимум нүктесі;

3) егер $f''(x_0)=0$ болса, онда x_0 нүктесі экстремум нүктесі болуы да, болмауы да мүмкін.

▼ 1) Теорема шарты бойынша

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$$

теңсіздігі орындалатындықтан, $\forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta$ нүктелері үшін $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$ теңсіздігі дұрыс болатын $\delta>0$ саны табылады. Бұдан $0<x-x_0<\delta$, яғни $x_0<x<x_0+\delta$ нүктелері үшін $f'(x)>0$, ал $-\delta<x-x_0<0$, яғни $x_0-\delta<x<x_0$ нүктелері үшін $f'(x)<0$ орындалатынын көреміз. Демек, 1-теореманың а) пункті бойынша x_0 локальдік минимум нүктесі болады;

2) тұжырым да дәл осылай дәлелденеді;

3) тұжырымның дұрыстығын мысалмен көрсетейік. Ол үшін $f_1(x)=x^3$ және $f_2(x)=x^4$ функцияларын қарастырайық. $x_0=0$ нүктесінде $f_1''(0)=f_2''(0)=0,$ бірақ $x_0=0$ нүктесі $f_1(x)=x^3$ функциясының экстремум нүктесі емес, ал $f_2(x)=x^4$ функциясы үшін ол – минимум нүкте. ▲

2-мысал. $y = 2\sin x + \cos 2x$ функциясының экстремум нүктелерін табу керек.

▼ Периодтылығына байланысты берілген функцияны $[0, 2\pi]$ кесіндісінде қарастырамыз.

Алдымен күдікті нүктелерді табайық:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x - 2\sin x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 1 - 2\sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + n\pi, \quad k, n \in Z. \end{array}\right.$$

Есептейміз:

$k = 0$ болса, $x_0 = \dfrac{\pi}{2} \in [0, 2\pi]$; $k = 1$ болса, $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi]$.

$n = 0$ болса, $x_2 = \dfrac{\pi}{6} \in [0, 2\pi]$; $n = 1$болса, $x_3 = -\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi]$.

Одан әрі, $y'' = -2\sin x - 4\cos 2x$, $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$,

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6 > 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 < 0, \quad f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3 < 0.$$

Сонымен,

$\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ – локальді минимум нүктелері, ал $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$ – локальді максимум нүктелері. ▲

Функциялардың кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

$[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз f функциясының ең үлкен (ең кіші) мәнін табу керек болсын. Ондай мән $[a,b]$ кесіндісінің белгілі бір x_0 нүктесінде болатыны белгілі (§4.9, 3-теореманы қараңыз).

Ендеше, тек келесі үш жағдай болуы мүмкін:

1) $x_0 = a$; 2) $x_0 = b$; 3) $x_0 \in (a,b)$.

Егер $x_0 \in (a,b,)$ болса, онда x_0 - критикалық нүкте.

Егер күдікті нүктелер $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ақырлы жиын құраса, онда

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_m)\}$$

$$(\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_m)\}).$$

3-мысал. $f(x) = \sin x + \cos x$ функциясының $[0;\pi]$ кесінді-дегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

▼ Күдікті нүктелерді анықтайық:

$$f'(x) = \cos x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tgx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Мұнда $k = 0$ болса, онда $x_0 = \frac{\pi}{4} \in [0,\pi]$, яғни $[0,\pi]$ кесіндісінде бір ғана нүкте жатады. Осы нүкте мен кесіндінің шекаралық нүктелеріне сәйкес функция мәндерін табамыз: $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, $f(\pi) = -1$.

Жауабы: $\max_{x\in[0,\pi]} f(x) = \sqrt{2}$, $\min_{x\in[0,\pi]} f(x) = -1$. ▲

§ 6.2. Функцияның дөңестігі. Иілу нүктелері

$f(x)$ функциясы I аралығында анықталсын $f: I \to R$.

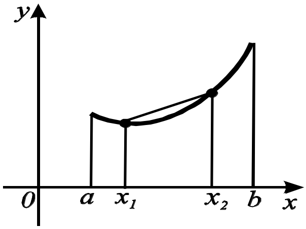
Анықтама. *Егер* $f(x)$ *функциясы графигінің кез келген* $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$ *екі нүктесінің арасындағы доға оны* *керетін хордадан жоғары (төмен) жатпаса, онда* $f(x)$ *функциясы I аралығында* ***дөңестігі төмен (жоғары) бағытталған,*** *немесе қысқаша* ***ойыс (дөңес) функция*** *деп аталады (58-суретте ойыс, 59-суретте дөңес қисықтар көрсетілген).*

Егер $f(x)$ ойыс функция болса, онда $-f(x)$ дөңес болады. Бұдан мынадай қорытынды жасауға болады:

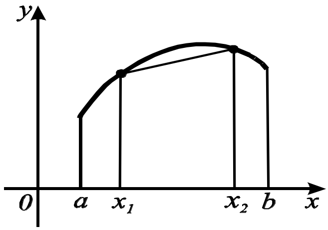
$f(x)$ ойыс функциясы үшін айтылған тұжырымды дөңес функция жағдайына келтіру үшін, оны $-f(x)$ функциясына қолдану жеткілікті. Сол себептен төмендегі теоремалар дәлелдеулерін тек ойыс функциялар жағдайы үшін ғана келтіреміз.

58-суреттен $A_1(x_1, f(x_1))$ және $A_2(x_2, f(x_2))$ нүктелерін қосатын хорда теңдеуі $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-f(x)}{f(x_2)-f(x_1)}$ немесе

$$y = f(x_1)\frac{x_2-x}{x_2-x_1} + f(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{1}$$



58-сурет



59-сурет

Енді жоғарыдағы ойыс функция анықтамасын келесі түрде беруге болады.

Анықтама. *Егер кез келген* $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ *нүктелері үшін*

$$f(x_1)\frac{x_2-x}{x_2-x_1} + f(x_2)\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \geq f(x), \quad x_1 < x < x_2 \tag{2}$$

шарты орындалса, онда $f(x)$ *функциясы I аралығында* ***ойыс функция*** *деп аталады.*

Оқушыға (2) теңсіздіктің келесі теңсіздікке парапар екенін дәлелдеуді ұсынамыз:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}, \quad x_1 < x < x_2 . \qquad (3)$$

1-теорема. I аралығында туындысы бар $f(x)$ функциясының осы аралықта **ойыс (дөңес)** функция болуы үшін, оның $f'(x)$ туындысының I аралығында **кемімейтін (өспейтін)** функция болуы қажетті және жеткілікті.

▼ **Қажеттілігі.** Айталық, $f(x)$ функциясы I аралығында ойыс болсын. Онда ол үшін (3) теңсіздік орындалады. (3) теңсіз-дікте алдымен $x \to x_1$ ұмтылдырып, сонан соң $x \to x_2$ ұмтылды-рып, шекке өтеміз:

$$\lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2},$$

$$\lim_{x\to x_2} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \lim_{x\to x_2} \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2},$$

ал бұдан келесі теңсіздіктер шығады:

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2), \quad x_1 < x_2 .$$

Бұл екі теңсіздіктен $f'(x_1) \le f'(x_2)$, $x_1 < x_2$, яғни $f'(x)$ туын-дысының кемімейтін функция екенін көреміз.

Жеткіліктілігі. Кез келген $x_1 < x < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ нүктелерін алайық. Лагранж теоремасы бойынша

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \quad x_1 < \xi_1 < x , \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2), \quad x < \xi_2 < x_2$$

болады.

$f'(x)$ кемімейтін функция болғандықтан, бұл екі теңсіздіктен $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1)\ \le\ f'(\xi_2)=\dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2},\quad x_1<x<x_2,$ теңсіздігінің шығатынын, яғни $f(x)$ функциясының ойыс екенін көреміз. ▲

$f(x)$ функциясының I аралығында екінші ретті туындысы бар болса, онда $f'(x)$ функциясы I аралығында кемімейтін (өспейтін) болуы $x\in I,\ \ f''(x)\ge 0\ \ \left(x\in I,\ \ f''(x)\le 0\right)$ шарттарымен парапар болғандықтан, келесі теоремаға келеміз.

2-теорема. Егер I аралығында $f(x)$ функциясының екінші ретті туындысы бар болса, онда $f(x)$ **ойыс (дөңес) функция** болуы үшін, әрбір $x\in I$ нүктесінде $f''(x)\ge 0\ \ \left(f''(x)\le 0\right)$ теңсіздігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

1-мысал. $f(x)=\ln x$ функциясы $(0,+\infty)$ аралығында дөңес функция, өйткені осы аралықта $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$.

2-мысал. $f(x)=x^{\alpha},\ 0<x<+\infty$ функциясы үшін $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Демек, $x^{\alpha},\ \ 0<x<+\infty$ функциясы $\alpha>1$ және $\alpha<0$ болса ойыс, ал $0<\alpha<1$ болса дөңес.

Анықтама. *$f(x)$ функциясы (a,b) аралығында анықталған және үзіліссіз болсын. Егер $x_0\in(a,b)$ нүктесінің белгілі бір оң және сол жақ маңайларында $f(x)$ функциясының дөңестігі қарама-қарсы бағытталған болса, онда $\left(x_0, f(x_0)\right)$ нүктесі $f(x)$ графигінің* ***иілу нүктесі*** *деп аталады.*

3-теорема (*иілу нүктесінің қажетті шарты*). $f(x)$ функциясы (a,b) аралығында дифференциалданатын және x_0 нүктесінде екінші ретті туындысы $f''(x_0)$ бар функция болсын.

Егер $\left(x_0, f(x_0)\right)$ иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0)=0$.

▼ Анықтылық үшін $f(x)$ функциясы оң жақ $(x_0, x_0+\delta)$ ма-ңайда ойыс, ал сол жақ $(x_0-\delta, x_0)$ маңайда дөңес болсын. Онда 1-теорема бойынша $f'(x)$ функциясы $(x_0-\delta, x_0)$ аралығында кемі-мейтін, ал $(x_0, x_0+\delta)$ аралығында өспейтін болады. $\varphi(x)=f'(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз (өйткені $f''(x_0)$ бар), сондықтан x_0 нүктесі $\varphi(x)=f'(x)$ функциясының локальдік максимум нүктесі. Демек, Ферма теоремасы бойынша $\varphi'(x_0)=0,$ яғни $f''(x_0)=0.$ ▲

4-*теорема (иілу нүктесінің жеткілікті шарты*). $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің белгілі бір δ маңайында үзіліссіз болсын.

Егер $f(x)$ функциясының $(x_0-\delta, x_0)$ аралығында кемімейтін (өспейтін) туындысы, ал $(x_0, x_0+\delta)$ аралығында өспейтін (кемі-мейтін) туындысы бар болса, онда $(x_0, f(x_0))$ – оның иілу нүктесі.

Басқаша айтқанда, x-тің өсу бағытымен x_0 нүктесінен өткенде екінші ретті $f''(x)$ туындының таңбасы өзгерсе, онда $(x_0, f(x_0))$ иілу нүктесі болады.

▼ 1-теорема бойынша $f(x)$ функциясы $(x_0-\delta, x_0)$ аралығын-да ойыс (дөңес), ал $(x_0, x_0+\delta)$ аралығында дөңес (ойыс) болады. ▲

3-мысал. $f(x)=x^4$ функциясының екінші ретті туындысы $f''(x)=12x^2\geq 0$ теріс емес болғандықтан, 2-теорема бойынша $f(x)$ функциясы $(-\infty;+\infty)$ аралығында ойыс болады. Мұнда $x_0=0$ нүктесінде $f''(x_0)=0$ болса да, ол $x_0=0$ иілу нүктесі емес.

Қорытынды. $f''(x_0)=0$ шарты иілу нүктесі үшін жеткілікті бола алмайды. Бірақ 3-теорема бойынша $f''(x_0)=0$ – иілу нүктесінің қажетті шарты.

4-мысал. а) $f(x)=\dfrac{9}{10}x^{\frac{5}{3}}$ функциясы үшін $x_0=0$ – иілу нүктесі, өйткені $f''(x) = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ болғандықтан, $x<0$ үшін $f''(x)<0,$ ал $x>0$ үшін $f''(x)>0$;

б) $\varphi(x) = \left| f(x) \right| = \frac{9}{10}\left| x^{\frac{5}{3}} \right|$ функциясы үшін $x_0 = 0$ иілу нүктесі емес, өйткені $x \neq 0$ үшін $\varphi''(x) = \left| x^{-\frac{1}{3}} \right| > 0.$

Ескерту. 4-мысалдағы екі функцияның да $x_0 = 0$ нүктесінде екінші ретті ақырлы туындысы жоқ.

Сонымен, функцияның иілу нүктелерін $f''(x_0) = 0$ орында-латын немесе $f''(x)$ болмайтын (жоқ) нүктелердің ішінен іздеу керек екен (ондай нүктелерді **функцияның екінші ретті күдікті нүктелері** деп те атайды).

§ 6.3. Функция графигінің асимптоталары

Егер $y = f(x)$ функция графигінің $M(x, f(x))$ нүктесі координат бас нүктесінен ақырсыз алыстағанда, М нүктесінен $y = kx + b$ түзуіне дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса, онда $y = kx + b$ түзуін $f(x)$ графигінің ***асимптотасы*** *деп атаймыз.*

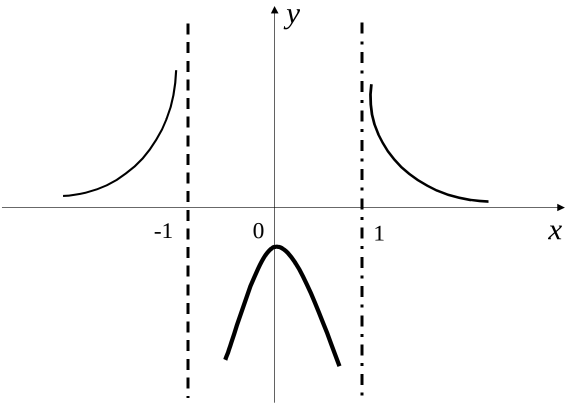
Мұнда екі жағдай болуы мүмкін:

1) $M(x, f(x))$ нүктесінің абциссасы x ақырлы a санына ұмтылады. Онда $x = a,$ $y > 0$ немесе $x = a,$ $y < 0$ жартылай түзуі **вертикаль асимптота** болады;

2) $M(x, f(x))$ нүктесінің абциссасы $x \to +\infty$ немесе $x \to -\infty$ ұмтылады. Онда $y = kx + b$ **көлбеу асимптота** деп аталады.

1-теорема (*вертикаль асимптота туралы*). $x = a$ түзуі вертикаль асимптота болуы үшін, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ немесе $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ шектерінің ең болмағанда біреуі ақырсыз болуы қажетті және жеткілікті.

1-мысал. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ функциясының (графигінің) екі верти-каль асимптотасы бар: $x_1=1$ және $x_2=-1$. Өйткені (60-сурет)



60-сурет

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{1}{(x-1)(x+1)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(x-1)(x+1)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1+}\frac{1}{(x-1)(x+1)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -1-}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1-}\frac{1}{(x-1)(x+1)}=+\infty.$$

Назар аударыңыз! Вертикаль асимптотаны анықтайтын $x=a$ саны – функциясының екінші текті үзіліс нүктесі.

Егер $y=f(x)$ үзіліссіз функция болса, онда вертикаль асимптота жоқ.

2-теорема (көлбеу асимптота туралы). $y=kx+b$ түзуі $y=f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы болуы үшін

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ және } b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right] \qquad (1)$$

шектерінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

(Мұнда $x\to+\infty$ ұмтылғандағы шек **оң жақ көлбеу асимп-тота,** ал $x\to-\infty$ ұмтылғандағы шек **сол жақ көлбеу асимптота** үшін қарастырылады).

▼ Дәлеледемені $x\to+\infty$ үшін қарастырайық.

Қажеттілігі. $y=kx+b$ оң жақ көлбеу асимптота болсын. Анықтама бойынша

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0 \qquad (2)$$

Бұл теңдіктен $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(kx+b)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k+\frac{b}{x}\right)=0,$

немесе $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$ Сонымен бірге (2) теңдіктен

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[f(x)-kx\right]-b\right\}=0,$$

яғни, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$ аламыз.

Жеткіліктілігі. (1) теңдіктерден

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[(f(x)-kx)-b\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$$

аламыз, яғни $x\to+\infty$ ұмтылғанда, $f(x)$ графигі мен $y=kx+b$ түзуінің арақашықтығы нөлге ұмтылады. Демек, $y=kx+b$ – асимптота.

Мысал. $f(x)=\frac{x^2-6x+3}{x-3}$ функциясының асимптоталарын табу керек.

▼ 1) $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = +\infty$ болғандықтан, $x=3$ – вертикаль асимптота;

2) $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-6x+3}{x^2-3x} = 1,$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+3}{x-3} = -3,$$

демек, $y = x-3$ – көлбеу асимптота болады. ▲

§ 6.4. Функцияны зерттеу және оның графигін салу

Функцияны зерттеп, оның графигін салу жұмысын келесі ретпен жүргізуге болады.

1. Функцияның анықталу жиынын анықтау. Оны жұп, тақ, периодтылыққа зерттеу. Графиктің координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу;

2. Функцияны үзіліссіздікке зерттеу.

3. Функцияның асимптоталарын табу.

4. Өсу, кему аралықтарын, экстремумдерді табу.

5. Ойыс, дөңес аралықтарын, иілу нүктелерін табу.

6. Табылған үзіліс нүктелерін, күдікті нүктелерді олардың арасындағы аралықтарды көрсетіп, кесте салу. Әрбір аралықта функцияның сипаты кескінделеді.

7. График дәлірек салынуы үшін, функцияның аралық мәндерін таба отырып, функция графигінің эскизін салу.

Мысал. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ функциясын зерттеп, оның графигінің эскизін салу керек.

▼ **1.** Функцияның анықталу жиыны $D = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Берілген функция: $y = e^{\frac{1}{x}} > 0$ болғандықтан, график OX өсімен де, $x \neq 0$ болғандықтан, OY өсімен де қиылыспайды. Функция жұп та, тақ та, периодты да емес.

2. Функцияның үзіліс нүктесі: $x_0 = 0.$ Өйткені,

$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty;$$

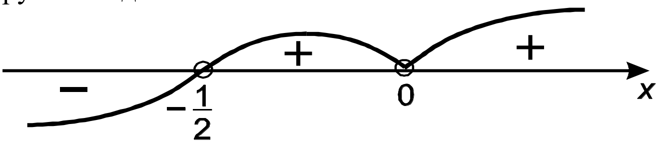
3. Алдыңғы пункттен $x=0,\ y>0$ – вертикаль асимптота болатынын көреміз. Енді көлбеу асимптотаны іздейік. Есептейміз:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - ax \right) = 1;$$

$y = kx + b = 0\cdot x + 1,$ яғни $y=1$ – көлбеу асимптота. Егер $k=0$ болса, онда ол **горизанталь асимптота** деп аталады, демек $y=1$ – горизонталь асимптота.

4. $y' = \left(e^{\frac{1}{x}} \right)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0,\ \ x \neq 0$ болғандықтан, берілген функция $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ аралықтарында кемімелі. Функцияның күдікті және экстремум нүктелері жоқ.

5. Екінші ретті $f''(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^2}$ туындысының таңбаларын 61-суреттен көруге болады.



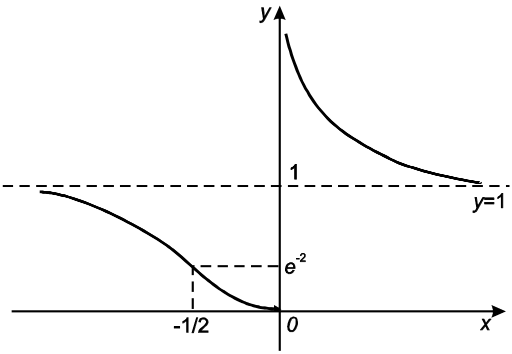
61-сурет

$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ аралығында функция дөңес, ал $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ және $(0;+\infty)$ аралықтарында ойыс. $x_0 = -\frac{1}{2}$ нүктесі – функцияның екінші ретті күдікті нүктесі: $\left(f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \right)$. Иілу нүктесі – $M\left(-\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = $ $= M\left(-\frac{1}{2};\ e^{-2}\right)$.

6) Алынған нәтижелерді кестеге жинақтап жазамыз:

x	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$	↘	e^{-2}	↘	$\nexists$	↘

7. График эскизі 62-суретте көрсетілген.



62-сурет

6-тарау. *Сұрақтар мен тапсырмалар*

1. Функцияның экстремум нүктелерінің анықтамасын келтіріңіз. Функцияның критикалық (күдікті) нүктесі деген не? Экстремум және критикалық нүктелер арасындағы қатысты түсіндіріңіз.
2. Экстремумнің жеткілікті шарты туралы екі теореманы дәлелдеңіз. Мысал келтіріңіз.

3. Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін қалай табуға болады? Мысал келтіріңіз.
4. Ойыс, дөңес функциялардың анықтамаларын келтіріңіз. Функцияның ойыс және дөңес аралықтарын қалай табуға болады? Мысал келтіріңіз.
5. Функцияның иілу нүктесінің анықтамасын келтіріңіз. Иілу нүктесін қалай табуға болады? Мысал келтіріңіз.
6. Функцияның асимптоталарының анықтамаларын келтіріңіз. Асимптоталарды қалай табуға болады? Мысал келтіріңіз.
7. Функцияны зерттеудің және оның графигін салудың жалпы ережелерін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

6.1-ҮТ

1. Келесі есептерді шығарыңыз

1.1. Тік конус формасындағы мата шатырдың көлемі *V*-ға тең. Шатырға кететін мата саны ең аз болуы үшін, конустың биіктігінің оның табан радиусіне қатынасы қандай болуы керек?

Жауабы: $\sqrt{2}$.

1.2. Табаны *a* және табанындағы бұрышы α-ға тең теңбүйірлі үшбұрышқа бір қабырғасы үшбұрыштың табанында, ал басқа қабырғасы үшбұрыштың бүйір қабырғасында жататын ауданы ең үлкен параллелограммды іштей сызу керек. Параллелограммның қабырғаларының ұзындықтарын табу керек.

Жауабы: $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{4\cos\alpha}$.

1.3. Көлемі *V*-ға тең, толық бетінің ауданы ең кіші болатын цилиндрдің R радиусі мен H биіктігінің арасындағы қатысты табу керек. **Жауабы:** $H = 2R$.

1.4. Жасаушысы 20 см тең конустық шұңқыр жасау керек. Оның көлемі ең үлкен болуы үшін шұңқыр биіктігі қандай болуы керек? **Жауабы:** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см.

1.5. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі $2p$-ға тең. Үшбұрыштың табанын айналуынан шыққан дене көлемі ең үлкен болуы үшін, үшбұрыш табаны қандай болуы керек? **Жауабы:** $\frac{p}{2}$.

1.6. Радиусі R-ге тең шарға іштей сызылған көлемі ең үлкен конустың биіктігін табу керек. **Жауабы:** $\frac{4R}{3}$.

1.7. Формасы дөңгелек секторы болатын клумбаны ұзындығы l м сыммен қоршау керек. Клумбаның ауданы ең үлкен болуы үшін, дөңгелек радиусі қандай болуы керек? **Жауабы:** $\frac{l}{4}$ м.

1.8. Радиусі a-ға тең жарты дөңгелекке іштей сызылған тік төртбұрыштың ең үлкен ауданын анықтау керек. **Жауабы:** a^2.

1.9. Ұзындығы 20 м бөрене формасы табан диаметрлері 2 м және 1 м болатын қиық конус. Бөренеден көлденең қимасы квадрат, өсі бөрене өсімен беттесетін, ал көлемі ең үлкен болатын балка кесіп алу керек. Балканың өлшемдері қандай болуы керек?

Ж: ұзындығы $\frac{40}{3}$ *м,* көлденең қимасының қабырғасы $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ м.

1.10. Жағадан 9 км қашықтықта якорьде тұрған корабльден лагерьге хабаршы жіберу керек. Лагерь корабльге ең жақын жағалау нүктесінен 1,5 км қашықтықта орналасқан. Хабаршының жаяу жылдамдығы – 5 км/сағ, ал қайықпен жүргендегі жылдамдығы – 4 км/сағ. Ол лагерьге ең аз уақытта жетуі үшін, жағаның қай жеріне жағалауы керек? **Жауабы:** лагерьден 3 км жер.

1.11. Ені a-ға тең тік төртбұрыш формасындағы қаңылтырдан иіп ашық дөңгелек цилиндр түріндегі қимасы сегмент формалы науа (желоб) жасалуы керек. Науаның сыйымдылығы ең үлкен болуы үшін, осы сегмент доғасына тірелетін φ центрлік бұрыш қандай болуы керек? **Жауабы:** $\varphi = \pi$.

1.12. Диаметрі d дөңгелек бөренеден қимасы тік төртбұрыш балка кесіп алу керек. Балка горизонталь орналастырылатын және оған бірқалыпты салмақ түсетін болса, оның майысуы ең аз болуы үшін, қиманың b ені мен h биіктігі қандай болуы керек? (Майысу шамасы көлденең қиманың b ені мен h биіктігінің көбейтіндісіне кері пропорционал). **Жауабы:** $b=\frac{d}{2}, \quad h=\frac{d\sqrt{3}}{2}$.

1.13. Жүктің 1 км теміржолмен тасымалдау құны – k_1 теңге, ал автомобильмен 1 км тасымалдау құны – k_2 теңге ($k_1 < k_2$). Суретте A пунктінен C пунктіне жүкті ең арзан бағамен жеткізу үшін, асфальт жолды қай орыннан бастап салу керек? Мұнда, $|AB| = a, \quad |BC| = b.$

Ж: A нүктесінен $a-\frac{k_1 b}{\sqrt{k_2^2-k_1^2}}$ қашықтықта.

1.14. Ілиясқа өзеннің жағасындағы A пунктінен арғы жағадағы B пунктіне өзенді кешіп баруы керек. Өзеннің ені h, ал A мен B пункттерінің арақашықтығы (жағаны бойлап өлшегенде) a-ға тең. Ілиястың жағамен жүргендегі жылдамдығы судағы жылдамдығынан k есе артық. Ол B пунктіне ең аз уақытта жетуі үшін, өзенді қандай бұрышпен кешіп өтуі керек? **Ж:** $\max\left(\arccos\frac{1}{k}, \operatorname{arctg}\frac{h}{a}\right).$

1.15. $|AB| = a$ тең кесіндінің A нүктедегі жарық көзінің күші p, ал B нүктедегі жарық көзінің күші q болса, осы кесіндідегі жарығы ең аз түсетін M нүктесін табу керек. (Жарық шамасы жарық көзінің қашықтығының квадратына кері пропорционал).

Жауабы: A нүктесінен $\frac{a\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$ қашық.

1.16. Шам радиусі r дөңгелек столдың центрінің үстіне ілінген. Столдың шетінде жатқан затқа жарық ең жақын түсуі үшін, шамды столдан қанша биіктікке ілу керек? (Жарық шамасы жарық сәулесінің түсу бұрышының косинусына тура пропорционал және жарық көзінің қашықтығының квадратына кері пропорционал).

Жауабы: $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

1.17. Берілген конусқа іштей сызылған цилиндрлердің ішіндегі бүйір бетінің ауданы ең үлкенін табу керек. Конустың биіктігі – *H*, табан радиусі – *R*.

Жауабы: цилиндр табанының радиусі $\frac{R}{2}$, биіктігі $\frac{H}{2}$.

1.18. Дөңгелек қағаздан сектор қиып алынды. Қағаздың қалған бөлігінен конустық құйғы желімделді. Құйғы көлемі ең үлкен болуы үшін, қиып алынған сектордың бұрышы қандай болуы керек? **Жауабы:** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

1.19. Бүйір бетінің ауданы *S*-ке тең барлық конустардың ішінен көлемі ең үлкенін табу керек.

Жауабы: конус табанының радиусі $\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$, биіктігі $\sqrt{\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}}$.

1.20. *B* пункті теміржолдан 60 шақырым жерде орналасқан. Теміржолмен *A* пунктінен *B* пунктіне ең жақын *C* нүктеге дейінгі қашықтық 285 км. Теміржолмен қозғалу жылдамдығы 52 км/сағ, ал тас жолмен қозғалу жылдамдығы 20 км/сағ. *A* пунктінен *B* пунктіне ең аз уақытта жетуі үшін, станцияны *C* нүктесінен қанша қашық-тықта салу керек? **Жауабы:** 25 км.

1.21. Ені *a* м канал ені *b* м каналға тікбұрыш жасап құйылады. Осы каналдар жүйесімен ағызатын бөренелердің ұзындығының ең үлкені қандай болуы керек? **Жауабы:** $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

1.22. Радиусі *R* шарды сырттай сызылған тік дөңгелек конустың көлемі ең кіші болуы үшін, оның *h* биіктігі мен *r* табан радиусі қандай болуы керек? **Жауабы:** $h=4R,\quad r=R\sqrt{2}$.

1.23. Бүйір қабырғалары *b*, кіші табаны *a* тең тең бүйірлі трапецияның ауданы ең үлкен болуы үшін, бүйір бұрышы қандай болуы керек? **Жауабы:** $\cos=\frac{\sqrt{a^2+8b^2}-a}{4b}$.

1.24. $y = 3\sqrt{x}$ қисығымен және $x = 4,$ $y = 0$ түзулерімен шенелген фигурадан ауданы ең үлкен төртбұрыш кесіп алу керек

Жауабы: $s = 9,22.$

1.25. Радиусі R шеңберге іштей сызылған тең бүйірлі үшбұ-рыш оның төбесі арқылы табанына параллель өтетін түзуді айна-лады. Алынған дененің көлемі ең үлкен болуы үшін үшбұрыш биіктігі қандай болуы керек? **Жауабы:** $\frac{5R}{3}.$

1.26. Сыйымдылығы V ашық цилиндрлік бак дайындау керек. Бактың түбін жасайтын материалдың 1 м^2 құны – P_1 теңге, ал бактың қабырғасын жасайтын материалдың 1 м^2 құны P_2 теңге. Бактың түбінің радиусінің биіктігіне қатынасы қандай болғанда, материалға кететін шығын ең аз болады? **Жауабы:** $\frac{P_2}{P_1}.$

1.27. Сұйықпен толтырылған биіктігі H ыдыс горизонталь жазықтықта тұр. Ыдыс тесігінен шығатын сұйықтың жылдамдығы Торричелли заңы бойынша $\sqrt{2gx}$ тең, мұндағы x – тесіктің сұйық бетінен қашықтығы; g – еркін түсу үдеуі. Тесіктен атқылаған сұйықтың түсетін қашықтығы ең үлкен болуы үшін, тесік қай жерде орналасуы тиіс? **Жауабы:** H биіктігінің ортасында.

1.28. Терезе жарты дөңгелекпен аяқталатын тік төртбұрыш формалы. Терезе периметрі – 15 м. Терезе жарықты ең көп мөлшер-де өткізуі үшін, жарты дөңгелектің радиусі қандай болуы керек?

Жауабы: 2,1 м.

1.29. Кітап парағындағы мәтіннің ауданы – S; жоғарғы және төменгі жол ені – a, ал оң және сол жол ені – b. Мәтіннің енінің биіктігіне қатынасы қандай болғанда, парақтың барлық ауданы ең кіші болады? **Жауабы:** $\frac{b}{a}.$

1.30. Диаметрі d дөңгелек бөренеден көлденең қимасы тік төртбұрыш балка кесіп алу керек. Балканың майысуға ең үлкен кедергісі болуы үшін, қиманың ені мен биіктігі қандай болуы керек?

Балканың майысуға кедергісі оның көлденең қимасының x ені мен y биіктігінің квадратының көбейтіндісіне пропорционал, яғни $Q = kxy^2$, $k = const.$ **Жауабы:** $x = \frac{d\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{d\sqrt{6}}{3}$.

2. Көрсетілген функцияларды туындылар арқылы толық зерттеу жүргізіңіз және олардың графиктерін салыңыз

2.1. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

2.2. $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$.

2.3. $y = e^{1/(5+x)}$.

2.4. $y = \frac{x}{9-x}$.

2.5. $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$.

2.6. $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$.

2.7. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

2.8. $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

2.9. $y = x - \ln(1 + x^2)$.

2.10. $y = x^3 e^{-x^2/2}$.

2.11. $y = x^2 - 2\ln x$.

2.12. $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$.

2.13. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$.

2.14. $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$.

2.15. $y = -\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2.16. $y = \ln(1 + x^2)$.

2.17. $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$.

2.18. $y = x\ln x$.

2.19. $y = (x-1)e^{3x+1}$.

2.20. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$.

2.21. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

2.22. $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$.

2.23. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

2.24. $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x-5)$.

2.25. $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$.

2.26. $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$.

2.27. $y=x^2+1/x^2$.

2.28. $y=(5x^4+3)/x$.

2.29. $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$.

2.30. $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$.

3. Көрсетілген функцияларды туындылар арқылы толық зерттеу жүргізіңіз және олардың графиктерін салыңыз

3.1. $y=e^{2x-x^2}$.

3.2. $y=x+\ln(x^2-4)$.

3.3. $y=\dfrac{2(x+1)^2}{x-2}$.

3.4. $y=x\ln^2 x$.

3.5. $y=(4e^{x^2}-1)/e^{x^2}$.

3.6. $y=x^2e^{-x^2/2}$.

3.7. $y=xe^{1/x}$.

3.8. $y=\dfrac{2+x}{(x+1)^2}$.

3.9. $y=\dfrac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$.

3.10. $y=xe^x$.

3.11. $y=x^2e^{1/x}$.

3.12. $y=x^2/(x+2)^2$.

3.13. $y=(x+2)e^{1-x}$.

3.14. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

3.15. $y=\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$.

3.16. $y=\dfrac{x^3}{9-x^3}$.

3.17. $y=(x+1)e^{2x}$.

3.18. $y=4x/(4+x^2)$.

3.19. $y=x^4/(x^3-1)$.

3.20. $y=\ln(x^2-2x+6)$.

3.21. $y=\ln(1-1/x^2)$.

3.22. $y=x^3/e^{x+1}$.

3.23. $y=x+2\operatorname{arctg} x$.

3.24. $y=1-\ln^3 x$.

3.25. $y=(x-1)e^{4x+2}$.

3.26. $y=\dfrac{2x^2+2+4x}{2-x}$.

3.27. $y=-x\ln^2 x$.

3.28. $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

3.29. $y=e^{1/(2-x)}$.

3.30. $y=\ln(4-x^2)$.

4. $y=f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз

4.1. $y=\ln(x^2-2x+2)$, $[0;3]$.

4.2. $y=3x/(x^2+1)$, $[0;5]$.

4.3. $y=(2x-1)/(x-1)^2$, $[-1/2;0]$.

4.4. $y=(x+2)e^{1-x}$, $[-2;2]$.

4.5. $y=\ln(x^2-2x+4)$, $[-1;3/2]$.

4.6. $y=x^3/(x^2-x+1)$, $[-1;1]$.

4.7. $y=((x+1)/x)^3$, $[1;2]$.

4.8. $y=\sqrt{x-x^3}$, $[-2;2]$.

4.9. $y=4-e^{-x^2}$, $[0;1]$.

4.10. $y=(x^3+4)/x^2$, $[1;2]$.

4.11. $y=xe^x$, $[-2;0]$.

4.12. $y=(x-2)e^x$, $[-2;1]$.

4.13. $y=(x-1)e^{-x}$, $[0;3]$.

4.14. $y=x/(9-x^2)$, $[-2;2]$.

4.15. $y=(1+\ln x)/x$, $[1/e;e]$.

4.16. $y=e^{4x-x^2}$, $[1;3]$.

4.17. $y=(x^5-8)/x^4$, $[-3;-1]$.

4.18. $y=(e^{2x}+1)e^{-x}$, $[-1;2]$.

4.19. $y=x\ln x$, $[1/e^2;1]$.

4.20. $y=x^3e^{x+1}$, $[-4;0]$.

4.21. $y=x^2-2x+2/(x-1)$, $[-1;3]$.

4.22. $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$, $[-4/5;3]$.

4.23. $y=e^{6x-x^2}$, $[-3;3]$.

4.24. $y=(\ln x)/x$, $[1;4]$.

4.25. $y=3x^4-16x^3+2$, $[-3;1]$.

4.26. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $[-1;2]$.

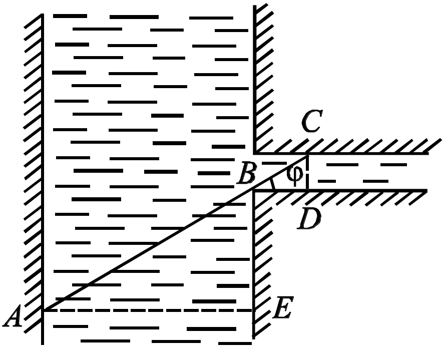
4.27. $y=(3-x)e^{-x}$, $[0;5]$.

4.28. $y=\sqrt{3}/2+\cos x$, $[0;\pi/2]$.

4.29. $y = 108x - x^4, \quad [-1; 4].$ **4.30.** $y = x^4/4 - 6x^3 + 7, \quad [16; 20].$

6.1-ҮТ шығару үлгісі (§6.1-§6.4)

1. Ені 32 м каналдан тікбұрышпен ені 4 м басқа канал кетеді (63-сурет). Осы каналдар жүйесімен ағызатын бөренелердің ең үлкен ұзындығын анықтау керек (бөрене қалыңдығы есепке алынбайды).



63-сурет

► Бөрене ұзындығы l болсын. Онда:

$$l = |AC| = |AB| + |BC|, \quad |AB| = \frac{|AE|}{\cos\varphi} = \frac{32}{\cos\varphi},$$

$$|BC| = \frac{|CD|}{\sin\varphi} = \frac{4}{\sin\varphi}, \quad l = \frac{32}{\cos\varphi} + \frac{4}{\sin\varphi}$$

l функциясын экстремумге зерттейміз:

$$l' = \frac{dl}{dy} = \frac{32}{\cos^2\varphi}\sin\varphi - \frac{4}{\sin^2\varphi}\cos\varphi = \frac{32\sin^3\varphi - 4\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}.$$

Егер $l'=0$ болса, онда $32\sin^3\varphi-4\cos^3\varphi=0.$ Ал $\cos\varphi\neq 0,$ демек, соңғы теңдеуден $\operatorname{tg}^3\varphi=\frac{1}{8},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2},\quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}},$ $\varphi\approx 26^0 34'$ аламыз. φ-дің осы мәнінің маңайындағы l'-туынды-сының таңбасы оның алымының таңбасымен анықталады, яғни $u(\varphi)=32\sin^3\varphi-4\cos^3\varphi.$ Есептейміз:

$$u(\varphi)\big|_{\varphi=26^0}\approx 32\cdot 0{,}438^3-4\cdot 0{,}899^3\approx 2{,}696-2{,}904<0,$$

$$u(\varphi)\big|_{\varphi=27^0}\approx 32\cdot 0{,}454^3-4\cdot 0{,}891^3\approx 2{,}994-2{,}829>0,$$

$$l(\varphi)\big|_{\varphi=26^0 34'}=l_{\max}.$$

Олай болса, $\varphi\approx 26^0 34'$ үшін $|AC|$ қашықтығы ең кіші болады, сондықтан бар каналдан екінші каналға ағызатын бөрененің ұзыны осы қашықтықтан үлкен бола алмайды: $l_{\max}=20\sqrt{5}\approx 44{,}72$ м. ◄

4. $y=2\sin x+\cos 2x$ функциясының $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

► Вейерштрасстың 2-ші теоремасы бойынша (§3.9,3-теорема) берілген функциясының $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде ең үлкен және ең кіші мәндері бар (тексеріңіз). Критикалық нүктелерді табамыз:

$$y'=2\cos x+2\sin x=0,\quad \cos x-2\sin x\cos x=0,\quad \cos x(1-2\sin x)=0.$$

Егер $\cos x=0$ болса, онда $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;$

Егер $1-2\sin x=0$ болса, онда $\sin x=\frac{1}{2},\quad x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $k,n\in Z.$ Осы саны ақырсыз критикалық нүктелердің тек екеуі:

$x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{2}$ - берілген $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде жатады. Функцияның осы екі нүктедегі және кесіндінің шеткі $x=0, \quad x=\frac{\pi}{2}$ нүктелердегі мәндерін табамыз: $y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{2}=1,5;$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi=2-1=1.$$

Бұдан, функция $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндіде ең үлкен мәнін $x=\frac{\pi}{6}$ нүктесінде $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1,5$, ал ең кіші мәнін $x=0$ және $x=\frac{\pi}{2}$ нүктелерінде: $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ қабылдайтынын көреміз. ◄

2. $y=\frac{(x+3)^2}{x-4}$ **функциясын толық зерттеу керек және оның графигін салу керек.**

► §6.4 келтірілген нұсқаны ұстанамыз.

1) Функциясының анықталу аймағы $x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.

2) $x>4$ болса график нүктелерінің ординатасы $y>0, x<4$ болса $y<0$.

3) Графиктің координат өстерімен қиылысу нүктелері: $\left(0;-\frac{9}{4}\right)$ және $(-3;0)$.

4) $x=4$ вертикаль асимптота екенін көру қиын емес. Өйткені,

$$\lim_{x\to 4-0} y=\lim_{x\to 4-0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 4-0} y=\lim_{x\to 4-0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=+\infty.$$

Енді көлбеу асимптоталарды табамыз:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)^2}{x(x-4)}=1,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(kx)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}-4\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x+9-x^2+4x}{x-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x+9}{x-4}=10.$$

Сонымен көлбеу асимптота: $y=x+10.$

5) Функцияны өсу, кему, локальді эктремумге зерттейміз:

$$y'=\frac{2(x+3)(x-4)-(x+3)^2}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-2x-24-x^2-6x-9}{(x-4)^2}=$$

$$=\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}.$$

$y'=0$ шартынан $x^2-8x-33=0,$ бұдан $x_1=11,$ $x_2=-3$ аламыз. $(\infty;-3)$ интервалында $y'>0$ болғандықтан функция өседі; $(-3;4)$ интервалында $y'<0$ болғандықтан функция кемиді. Сондықтан $x=-3$ нүктесінде функция локальді максимумге ие болады: $y(-3)=0.$ Ал $(4;11)$ интервалында $y'<0,$ демек функция кемиді; $(11;+\infty)$ интервалында $y'>0$, демек, функция өседі. Сондықтан $x=11$ - локальді минимум.

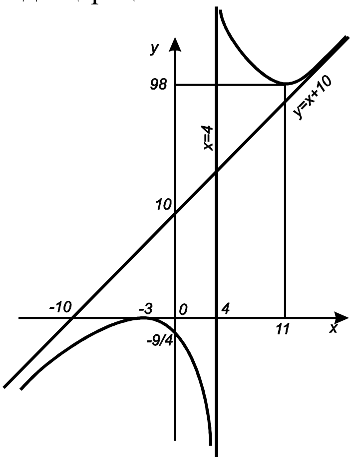
6) Функция графигінің дөңес, ойыс аралықтарын және иілу нүктелерін табамыз: $y''=\dfrac{(2x-8)\cdot(x-4)^2-\left(x^2-8x-33\right)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4}=$

$$=\frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x+66}{(x-4)^3}=\frac{98}{(x-4)^3}.$$

Бұдан $\left(-\infty;4\right)$ интервалында $y''<0$ болғандықтан, қисық дөңес; $\left(4;+\infty\right)$ интервалында $y''>0$, демек, қисық ойыс. Ал $x=4$ нүктесінде функция анықталмағандықтан, иілу нүктесі жоқ.

Функция графигі 64-суретте бейнеленген. ◄

Ескерту. §6-4 мысалды қараңыз.



64-сурет

3. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ **функциясын зерттеп, оның графигін салыңыз.**

► Функцияны зерттеудің жалпы нұсқасын ұстанамыз.

1) Функцияның анықталу аймағы $\left(-\infty; +\infty\right)$.

2) $x=0$ болса $y=0$ демек, график координат басынан өтеді.

3) Функция $\left(0; +\infty\right)$ интервалында оң мәндер, ал $\left(-\infty; 0\right)$ интервалында теріс мәндер қабылдайды.

4) Вертикаль асимптота жоқ. Көлбеу асимптоталарды іздейміз:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0.$$

Горизанталь асимптота теңдеуін алдық: $y=0$.

5) Функция тақ, өйткені: $y(-x)=-xe^{-\frac{(-x)^2}{2}}=-xe^{\frac{-x^2}{2}}=-y(x)$.

Олай болса оның графигі координат басына салыстырғанда симметриялы.

6) Функцияны монотондылыққа зерттейміз:

$y'=\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}-x\cdot x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{x^2}}=\dfrac{1-x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}}$. Егер $y'=0$ болса, онда $1-x^2=0$, бұдан $x_1=-1,\ x_2=1$ аламыз. Бұл нүктелер сан өсін үш интервалға бөледі: $(-\infty;-1)$ интервалында $y'<0$ болғандықтан, функция кемиді; $(-1;1)$ интервалында $y'>0$ болғандықтан, функция өседі; $(1;+\infty)$ интервалында $y'<0$ болғандықтан, функция кемиді.

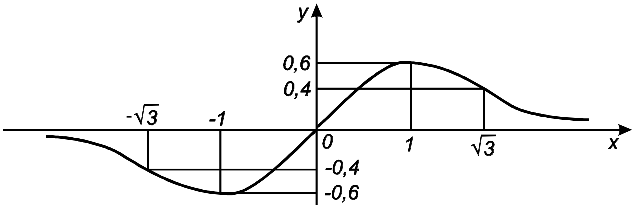
$x=-1$ нүктесінде минимум: $y(-1)=-\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\approx-0,6$, ал $x=1$ нүктесінде максимум: $y(1)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\approx0,6$ аламыз;

7) Екінші туындыға байланысты функцияның қасиеттерін зерттейміз: $y'=\dfrac{1-x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}}$, $y''=\dfrac{-2xe^{\frac{x^2}{2}}-\left(1-x^2\right)x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{x^2}}=$

$$=\frac{xe^{\frac{x^2}{2}}\left(-2-1+x^2\right)}{e^{x^2}}=\frac{x\left(x^2-3\right)}{e^{\frac{x^2}{2}}}.$$

Егер $y''=0$ болса, онда $x\left(x^2-3\right)=0$, бұдан $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$ аламыз. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(0;\sqrt{3}\right)$ интервалдарында $y''<0$ болғандықтан, қисық дөңес; $\left(-\sqrt{3};0\right)$, $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ интервал-дарында $y''>0$ болғандықтан қисық ойыс. $x=\pm\sqrt{3}$, $x=0$ нүктелерінде y'' таңбасын ауыстырғандықтан, олар иілу нүктелері және олардың ординаталары: $y\left(\pm\sqrt{3}\right)=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{e^{\frac{3}{2}}}\approx\pm0,4;$ $y(0)=0.$

8) Алынған мәліметтер бойынша функция графигін саламыз (65-сурет).



65-сурет

7. АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛДАР

§ 7.1. Анықталмаған интеграл. Интегралдар кестесі

Бұрын біз берілген функция бойынша оның туындысын табу есебімен айналыстық. Енді оған кері есепті қарастырамыз: **туындысы берілген, функцияның өзін табу керек.** Бұл механикалық тұрғыдан, материалдық нүкте қозғалысының белгілі жылдамдығы бойынша оның қозғалыс заңын табу екенін білдіреді.

Анықтама. Егер $F(x)$ функциясы Δ аралығында дифференциалданса және

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in \Delta,$$

теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының Δ **аралығындағы алғашқы функциясы** деп аталады.

(Төменде $\Delta = (a,b)$ деп ұйғарамыз. Басқа жағдайлар болса, атап көрсетеміз).

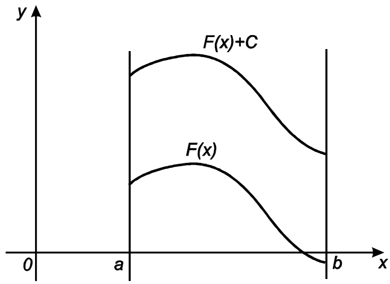
Мысалы, $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ функциясының $\Delta = (0,+\infty)$ аралығындағы алғашқы функцияларының біреуі – $F(x) = \sqrt{x}$, өйткені $\forall x \in (0,+\infty)$ нүктелері үшін $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$f(x) = 2\cos 2x$ функциясының $\Delta = (-\infty;+\infty)$ аралығындағы алғашқы функцияларының біреуі – $F(x) = \sin 2x,$ өйткені $\forall x \in (-\infty;+\infty)$, $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$.

Егер $f(x)$ функциясының Δ аралығындағы алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда кез келген C тұрақты мен $F(x)$ функциясының қосындысы, яғни $F(x)+C$ функциясы да осы $f(x)$ функциясының Δ аралығындағы алғашқы функциясы болады, өйткені $\forall x \in \Delta$, $\left(F(x)+C\right)' = F'(x) + C' = f(x)$.

Екінші жағынан, егер $f(x)$ функциясының Δ аралығындағы алғашқы функциялары $F_1(x)$ пен $F_2(x)$ болса: $F_1'(x) = f(x)$,

$F_2'(x) = f(x)$, $\forall x \in \Delta$, онда осы екі алғашқы функциялардың айырымы тұрақты C, яғни $F_1(x) - F_2(x) = C$, $\forall x \in \Delta$, болатынын көруге болады. Шынында да, егер $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ деп алсақ, онда $\Phi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in \Delta$, ал бұдан §4.10, 6-теорема бойынша $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) = C$, $\forall x \in \Delta$ шығады. Бұл айтылғандардан, егер $f(x)$ функциясының Δ аралығындағы алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда оның осы Δ аралығындағы кез келген басқа алғашқы функциясы $\Phi(x) = F(x) + C$ түрінде болатыны шығады, мұндағы C осы теңдік дұрыс болатындай етіп таңдап алынатын тұрақты сан (66-сурет).



66-сурет

Δ – кез келген аралық болсын.

Анықтама. f функциясының Δ аралығындағы барлық **алғашқы функцияларының жиыны** $\boldsymbol{f}$ **функциясының** Δ **аралығындағы анықталмаған интегралы** деп аталады және ол $\int f(x)dx$ символымен белгіленеді. Мұндағы, $\int$ – интеграл белгісі; $f(x)$ **– интеграл астындағы функция;** $f(x)dx$ **– интеграл астындағы өрнек.**

Егер, $f(x)$ функциясының қандай да бір алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда келесі теңдікті жазуға болады:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Жиын болғандықтан $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$ деп жазылуға тиіс, бірақ оны (1) түрінде жазу қалыптасқан.

Ескерту. $\int f(x)dx$ символы f функциясының алғашқы функцияларының жиыны болғанымен, есептеу барысында олардың бірімен ғана амалдар орындалады да, есептеу аяқталған соң, жоғарыда келтірілген пайымдауларға сүйеніп, С тұрақтысын қосып жазу арқылы алғашқы функциялар жиынына көшеді.

Интеграл астындағы f функциясының dx дифференциалына көбейтіліп жазылуынан алғашқы функцияның қайсы айнымал бойынша ізделінетінін көреміз, мысалы,

$$\int x^2 z dx = \frac{x^3 z}{3} + C, \qquad \int x^2 z dz = x^2 \frac{z^2}{2} + C.$$

Оның басқа да ыңғайлы жақтары (интегралда айнымал ауыстыру және т.б.) алдымызда көрсетіледі.

$f(x)$ функциясының алғашқы функциясын табу амалын $f(x)$ ***функциясын интегралдау амалы*** деп атайды.

Жоғарыда, егер $f(x)$ үшін Δ аралығында алғашқы функция бар болса, онда ол жалғыз емес екенін көрдік. Осыған орай мынадай сұрақ туады: (a, b) аралығында кез келген $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы бар ма?

Кейінірек, егер $f(x)$ функциясы (a, b) аралығында үзіліссіз немесе монотонды болса, онда $f(x)$ үшін осы аралықта алғашқы функция бар болатынын көрсетеміз. Қазірше кез келген үзіліссіз функцияның алғашқы функциясы бар деп қабылдап, үзіліссіз функциялармен жұмыс істейміз.

Анықталмаған интегралдың қасиеттерін қарастырайық.

1°. Егер $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда интеграл астындағы $f(x)dx$ өрнегі $F(x)$ функциясының дифференциалы

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF(x), \tag{2}$$

екенін ескеріп және жоғарыдағы анықтаманы пайдаланып келесі теңдіктерді жаза аламыз (көз жеткізіңіз)

$$\int dF(x) = F(x) + C; \qquad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \qquad \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

2º. **а)** $\int A \cdot f(x)dx = A\int f(x)dx + C,$ A – тұрақты сан;

б) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C.$

Соңғы, (б) теңдік интегралдың **аддитивтілік қасиеті** деп аталады.

▼ Мысалы, б) қасиетін көрсетейік.

$[\Phi_1(x)]' = \left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' =$

=/анықтама бойынша/= $f(x) + g(x)$;

$[\Phi_2(x)]' = \left(\int [f(x) + g(x)]dx\right)' =$ /анықтама бойынша/ =

$= f(x) + g(x)$.

Сонымен $\Phi_1(x)$ және $\Phi_2(x)$ функциялары $f(x) + g(x)$ функциясының екі алғашқы функциясы болып отыр. Ендеше, олардың айырымы C тұрақты сан:

$\Phi_1(x) - \Phi_2(x) = \int [f(x) + g(x)]dx - \left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right) = C,$ яғни б) теңдік орындалады. а) теңдігі де осылай дәлелденеді. ▲

3º. Егер $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда $f(ax+b)$ функциясының алғашқы функциясы $\frac{1}{a}F(ax+b)$ болады, яғни

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

▼ $$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a} \cdot a \cdot F'(ax+b) = f(ax+b).$$ ▲

Мысалы, $f(x) = e^x$ функциясының $\Delta = (-\infty; +\infty)$ аралығын-дағы алғашқы функциясы $F(x) = e^x$. Демек, **4º** қасиет бойынша,

$$\int e^{4x+3}dx = \frac{1}{4}e^{4x+3} + C.$$

Дифференциалдау формуласынан шығатын **интегралдар кестесін** келтірейік (теңдіктер бөлшектің бөліміндегі функциялар нөлге тең емес нүктелерде дұрыс).

1) $\int 0\, dx = C.$

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

3) $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \forall x \neq 0.$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \ \ a > 0, \quad a \neq 1.$ Дербес жағдайы: егер $a = e$ болса, онда $\int e^x dx = e^x + C.$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \qquad \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

7) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x;, \qquad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$

(мұнда $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$).

8) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \qquad \int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

9) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C.$

10) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C, \ \ |x| \neq |a|.$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, \ \ |x| < |a|.$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, \ \ x^2 + a > 0, \ \ a \neq 0.$

13) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right| + C.$

14) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right) \right| + C.$

Бұл теңдіктердің дұрыстығын дифференциалдау арқылы тексеруге болады. Мысалы, **3)** формуланы дәлелдейік.

▼ $x \neq 0$ үшін, $|x| = x \cdot \operatorname{sign} x$ теңдігінен $|x|' = \left(x \cdot \operatorname{sign} x\right)' = \; = \operatorname{sign} x$ аламыз. Олай болса, $(\ln|x| + C)' = \dfrac{1}{|x|} \cdot |x|' = \dfrac{\operatorname{sign} x}{x \cdot \operatorname{sign} x} = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. ▲

Енді 12) формуланы дәлелдейік.

▼
$$(\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C)' = \frac{1}{\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|} \cdot \left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|' =$$

$$= \frac{1}{\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|} \cdot \operatorname{sign}(x + \sqrt{x^2 + a}) \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|} \cdot \operatorname{sign}(x + \sqrt{x^2 + a}) \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(x + \sqrt{x^2 + a})}{(x + \sqrt{x^2 + a}) \cdot \operatorname{sign}(x + \sqrt{x^2 + a})} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + a}}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$$ ▲

Элементар функциялардың туындылары элементар функ-циялар болатыны белгілі. Ал элементар функцияларды интегралдау нәтижесінде элементар функция алынбауы да мүмкін.

Мысалы, келесі интеграл астындағы функциялардың алғашқы функциялары элементар функциялар еместігі дәлелденген:

$\int e^{-x^2} dx$ – Пуассон интегралы;

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ – Френель интегралы;

$\int \dfrac{dx}{\ln x}$ – интегралдық логарифм;

$\int \dfrac{\cos x}{x} dx$ – интегралдық косинус;

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегралдық синус;

$\int \frac{e^x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$,   т.с.с.

Бұл интегралдарды есептеу үшін, мысалы, интеграл астындағы функцияны дәрежелік қатарларға жіктеп, мүшелеп интегралдау әдісін қолданады.

§ 7.2. Интегралдау әдістері

7.2.1. Айнымал ауыстыру әдісі

Интегралдық есептеулерде айнымал ауыстыру формуласы ерекше орын алады.

Теорема (*интегралдау формулаларының инварианттылығы*). $u = \varphi(x)$ – кез келген дифференциалданатын функция болсын. Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ болса, онда

$$\int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C. \quad (1)$$

немесе $\int f(u)du = F(u) + C, \quad u = \varphi(x)$.

▼ $F(u) = F[\varphi(x)]$ функциясының бірінші дифференциалының инварианттылығын (IV тарау 4.8 п. қараңыз) пайдаланып $dF(u) = = F'(u)du = f(u)du,$ ал бұдан $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$ аламыз. ▲

1-мысал.

а) $\int e^{x^2} \cdot 2xdx = \int e^{x^2} dx^2 = \int e^u du = e^u \Big|_{u=x^2} + C = e^{x^2} + C.$

б) $\int \cos(3x-1)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x-1)d(3x-1) =$

$$= \frac{1}{3}\int \cos u du = \frac{1}{3}\sin u\Big|_{u=3x-1} + C = \frac{1}{3}\sin(3x-1) + C .$$

Мұнда айнымал ауыстырудың ***«дифференциал таңбасының астына алу»*** түрі қолданылды. Ал егер айнымал ауыстыруды тікелей орындасақ онда,

$$\int \cos(3x-1)dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x+1,\ du = d(3x+1) = \\ = 3dx,\quad dx = \dfrac{1}{3}du \end{array} \right| = \int \cos u \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \cos u \cdot du =$$

$$= \frac{1}{3}\sin u\Big|_{u=3x+1} = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + C.$$

Ескерту. Бұл интеграл, әрине, **§ 7.1. 3°** қасиет бойынша жылдам табылады: $\int \cos(3x-1)dx = \ \dfrac{1}{3}\sin(3x-1) + C.$

Есептеу барысында а), б) теңдіктер тізбегінің $e^u\Big|_{u=x^2}$, $\dfrac{1}{3}\sin u\Big|_{u=3x-1}$ түріндегі мүшелері жазылмайды. Алдымыздағы мысалдарда біз солай етеміз.

***Келесі түрдегі интегралдарды*:**

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}, \tag{*}$$

квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөлу арқылы есептеуге болады.

Мысалы,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 2} = \int \frac{dx}{x^2 - 2\cdot\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2} = \int \frac{d(x-\frac{5}{2})}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2} = \left| u = x - \frac{5}{2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\frac{\sqrt{17}}{2}} \ln\left| \frac{\left(x-\frac{5}{2}\right) - \frac{\sqrt{17}}{2}}{\left(x-\frac{5}{2}\right) + \frac{\sqrt{17}}{2}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{17}} \ln\left| \frac{2x-5-\sqrt{17}}{2x-5+\sqrt{17}} \right| + C.$$

Енді айнымал ауыстыру әдісін келесі ***қарапайым бөлшектерді***

а) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \in N$, (2)

б) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k \in N, \quad D = p^2 - 4q < 0$ (3)

интегралдауға қолданып көрейік.

▼ **а)** Егер $k=1$ болса, онда

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} \overset{(1)}{=} A \cdot \ln|x-a| + C;$$

егер $k \geq 2$ болса, онда

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}\, d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

б) (3) түрдегі қарапайым бөлшекті k=1 үшін интегралдайық, ал $k \geq 2$ жағдайын 7.2.2. п., 4-мысал арқылы көрсетеміз.

Сонымен $k=1$ болсын. Онда $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \Big|$Бөлшектің алымын квадрат үшмүшеліктің туындысы $(x^2+px+q)' = 2x+p$ арқылы өрнектейміз$\Big| =$

$$= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx - \left(\frac{Ap}{2} - B\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} - \frac{Ap-2B}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \left| \begin{array}{c} q - \frac{p^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2 \\ 4q - p^2 > 0 \end{array} \right| =$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| - \frac{Ap-2B}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{4q-p^2}} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C\,. \blacktriangle$$

Ескерту. $$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}dx \qquad (**)$$

түріндегі интегралды да б) мысалындағы әдісті пайдаланып есептеуге болады.

Біз жоғарыдағы мысалдарда $t=\varphi(x)$ түріндегі айнымал ауыстыруын қолдандық. Енді $x=\psi(t)$ түріндегі ауыстыруды қолдану мысалын көрсетейік. Ол тригонометриялық және гипер-болалық функцияларды интегралдауда жиі қолданылады.

Егер $x=\psi(t)$ ***қандай да бір аралықта үзіліссіз диффе-ренциалданатын функция болса, онда***

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt + C. \qquad (4)$$

$\blacktriangledown$ Шынында да, $\frac{d}{dt}\left[\int f(x)dx\right] = \frac{d}{dx}[\int f(x)dx]\frac{dx}{dt} = f[\psi(t)]\psi'(t),$

ал $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$ интегралы да – осы $f[\psi(t)]\psi'(t)$ функциясының қандай да бір алғашқы функциясы. Бір функцияның екі алғашқы функцияларының айырымы тұрақты сан болатыны белгілі. $\blacktriangle$

Ескерту. *(4) айнымал ауыстыруын қолданғанда $\psi(t)$ мен $f(x)$ функцияларының анықталу жиындары: D_t мен D_x арасында өзара бірмәнді сәйкестік болатындай (бұл жағдайды $D_t \leftrightarrow D_x$ деп белгілейді) және $x=\psi(t)$ функциясы D_x жиынындағы өз мәндерін түгел қабылдайтындай болуға тиіс.*

3-мысал. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ табу керек.

▼ $x = a\sin t$ айнымал ауыстыруын жасайық. Мұнда $D_x: \ -a \le x \le a$, ал $D_t: \ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Сонымен бірге $D_t \leftrightarrow D_x$, яғни D_t мен D_x аймақтарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік бар екенін көреміз.

Онда $dx = a \cdot \cos t \, dt$ болады да, келесі есептеулерді жүргі-земіз:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos dt = a^2 \int |\cos t| \cdot \cos t dt =$$

$$= \left| \forall t: \ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}, \ \cos t \ge 0 \ \right| =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t) \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2}\sin t \cdot \cos t + C.$$

Алынған өрнектен $t = \arcsin\frac{x}{a}$ теңдігін пайдаланып, x айны-малға өтеміз: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C =$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$ ▲

7.2.2. Бөліктеп интегралдау әдісі.

Егер $u(x)$ және $v(x)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болса, онда

$$\int u dv = uv - \int v du + C \tag{5}$$

немесе

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx + C \tag{5'}$$

теңдігі орындалады.

▼ (5) формуланы дәлелдейік. Ол үшін $F_1(x)=\int udv$, $F_2(x)=uv-\int vdu$ бір ғана функцияның алғашқы функциялары болатынын көрсетсек болғаны: $\left[F_1(x)\right]'=\left(\int udv\right)'=\left(\int uv'dx\right)'=uv'$, $\left[F_2(x)\right]'=\left(uv\right)'-\left(\int vdu\right)'=u'v+uv'-vu'=uv'$. ▲

(5) немесе (5′) формулаларын қолданып есептеу – **бөліктеп интегралдау әдісі** деп аталады.

Бұл әдісті формуланың оң жағындағы интеграл сол жағын-дағы берілген интегралға қарағанда қарапайымдау болған жағдайда қолданады және *u* үшін туындысы ықшамдалатын көбейткішті алады. Мысалы, интеграл астында көпмүшелік пен тригоно-метриялық немесе көрсеткіштік функцияның көбейтіндісі тұрса, онда *u* үшін көпмүшелікті, ал *d*v үшін қалған өрнекті алады. Егер интеграл астындағы функцияның көбейткіші логарифмдік немесе кері тригонометриялық функция болса, онда *u* үшін соларды алады.

(5) немесе (5′) формула бірнеше рет қайталап қолданылуы мүмкін.

1-мысал. $\int x\ln xdx$ есептеу керек.

▼ $u=\ln x,\ dv=xdx$ деп алсақ, $du=\frac{1}{x}dx$,

$v=\int dv=\int xdx=\frac{x^2}{2}$ болады. Бөліктеп иртегралдау формуласын қолданамыз, $\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$ ▲

2-мысал. Есептеу керек $J=\int e^{2x}\cdot\sin x\,dx$.

▼ Бұл жағдайда $u=e^{2x}$ немесе $u=\sin x$ деп алуға болады. Егер $u=e^{2x}$ деп алсақ, онда $u=e^{2x},\ du=2e^{2x}dx,\ dv=\sin xdx,\ v=-\cos x$ болады да, $J=\int e^{2x}\sin xdx=-e^{2x}\cdot\cos x+2\int e^{2x}\cos xdx$ өрнегіне келеміз.

Оң жақтағы интегралға бөліктеп интегралдау әдісін тағы да қолданып есептейміз: $u = e^{2x}$, $du = 2e^{2x}dx$, $dv = \cos x dx$, $v = \sin x$,

$$J = -e^{2x}\cos x + 2(e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x dx) =$$
$$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4J,$$

яғни $J + 4J = e^{2x}(2\sin x - \cos x)$ немесе $J = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x)$. ▲

3-мысал. а) $\int P_n(x)e^{bx}dx$, б) $\int P_n(x)\cos bx dx$, в) $\int P_n(x)\sin bx dx$ түрлеріндегі интегралдары есептеу керек.

▼ Егер бөліктеп интегралдау әдісін қолдансақ, оны n рет қайталап пайдалану керек. Өйткені бірінші рет $u = P_n(x)$, екінші рет $u = P_n'(x)$, т.с.с., n-ші рет бөліктеп интегралдауда $u = P_n^{(n-1)}(x)$ деп алып, нәтижесінде кестелік интегралға келеміз.

Бірақ интеграл астындағы функциялардың алғашқы функцияларының сипатын оңай аңғаруға болады. Сондықтан а), б), в) түріндегі интегралдарды ***анықталмаған коэффициенттер әдісі-мен*** жылдамырақ табуға болады. Оны келесі мысалмен түсін-дірейік.

3′-мысал. $\int (x^2+1)e^x dx$ есептеу керек.

▼ $(x^2+1)e^x$ функциясының алғашқы функциясы

$$Q_2(x) = (ax^2 + bx + C)e^x$$

түрінде болатынын аңғарамыз. Олай болса $[Q_2(x)]' =$ $= [(ax^2+bx+C)e^x]' = (x^2+1)e^x$ теңдігі орындалуы тиіс. Бұл теңдіктің сол жағын дифференциалдап, $[ax^2 + (2a+b)x + b + C]e^x = \; = (x^2+1)e^x$ немесе $ax^2 + (2a+b)x + b + C \equiv x^2 + 1$ теңдігіне келеміз. x-тің бірдей дәрежесінің коэффициенттерін теңестіреміз $\begin{cases} a = 1, \\ 2a + b = 0, \\ b + C = 1 \end{cases}$ немесе $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$.

Олай болса, $\int (x^2+1)e^x dx = \; = (x^2-2x+3)e^x + C.$ ▲

4-мысал. $\int \frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^k}dx, \qquad D=\frac{p^2}{4}-q<0, \qquad k\ge 2$ түріндегі интегралды есептеу керек.

▼ $k=1$ жағдайын 7.2.1 п. қарастырғанбыз. Мұнда да бөлшектің алымынан квадрат үшмүшеліктің туындысын ажырату арқылы берілген интегралды кестелік интеграл мен

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad t = x+\frac{p}{2} \tag{6}$$

түріндегі интеграл қосындысына келтіруге болады. $k\ge 2$ болса, онда (6)-түрдегі интеграл **рекурренттік формула** арқылы табылады.

Енді осы әдісті көрсетейік ($k\ge 2$).

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[J_{k-1} - \int \frac{t\cdot tdt}{(t^2+a^2)^k}\right] =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u=t, \quad du=dt, \quad dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}, \;\; v=\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k} d(t^2+a^2) = \\ = \;\frac{1}{2}\frac{1}{-k+1}\cdot (t^2+a^2)^{-k+1} = \frac{-1}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[J_{k-1} - \left(\frac{-t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[J_{k-1} - \frac{1}{2(k-1)}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right] =$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\frac{2k-3}{2(k-1)}\cdot J_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right].$$

Олай болса (6) интегралды келесі рекуррентті формуланы қолданып есептеуге болады екен:

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{2k-3}{2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right], \quad (7)$$

$k\geq 2$ – натурал сан.

4′-мысал. $\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+5)^2}dx$ табу керек.

▼ Бөлшектің алымында $(x^2+2x+5)'=2x+2$ туындысын ажыратып аламыз және интегралды кестелік интеграл мен (6) түрдегі интеграл қосындысына келтіреміз.

$$\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+5)^2}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-1}{(x^2+2x+5)^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}dx-\int\frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\int(x^2+2x+5)^{-2}d(x^2+2x+5)-\int\frac{dx}{[(x+1)^2+4]^2}=$$

$=|$ Біріншісі кестелік интеграл, екінші интегралға $k=2, a^2=4$ деп алып, (7) рекурренттік формуланы қолданамыз $|=$

$$=-\frac{3}{2}(x^2+2x+5)^{-1}-\frac{1}{4}\left[\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot(2-1)}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}+\frac{x+1}{2(2-1)\left\{(x+1)^2+4\right\}}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+5}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{8(x^2+2x+5)}+C=$$

$$=\frac{-x-13}{8(x^2+2x+5)}-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$ ▲

Назар аударыңыз! Анықталмаған интегралдағы C тұрақтысының рөлін оқушы келесі мысалдан көре алады.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \begin{vmatrix} u = \dfrac{1}{\sin x}, & dv = \cos x dx \\ du = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx, & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sin x}\cdot \sin x + \int \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

немесе $\quad 0 = 1.$

7.2.3. Рационал бөлшектерді интегралдау

Келесі **рационал бөлшекті** (6-тарау § 6.3 қараңыз):

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \tag{1}$$

$$P_m(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m, \quad Q_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

$$b_m \neq 0, \;\; a_n \neq 0, \;\; m \geq 0, \;\; n \geq 1,$$

интегралдау жолдарын көрсетейік. Мұндағы P_m, Q_n – нақты көпмүшеліктер, ал x – нақты айнымал, m-бөлшектің алымындағы көпмүшеліктің, ал n – бөлшектің бөліміндегі көпмүшеліктің дәреже көрсеткіші.

Егер $m \geq n$ болса, онда (1) **бұрыс бөлшек,** ал $m<n$ болса, онда ол **дұрыс бөлшек** деп аталады. Бұрыс бөлшекті алымын бөліміне «бұрыштап» бөлу арқылы дұрыс бөлшекке келтіруге болады:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)}, \tag{2}$$

мұндағы $M_{m-n}(x)$ өрнегі $(m-n)$-ші, ал $P_{m_1}(x)$ өрнегі m_1-ші дәрежелі көпмүшеліктер; $m_1 < n,$ яғни, $\dfrac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)}$ – дұрыс бөлшек.

Көпмүшелікті интегралдау қиын емес, сондықтан рационал бөлшекті интегралдау мәселелері дұрыс бөлшекті интегралдауда жатыр.

Дұрыс бөлшекті интегралдаудың негізгі тәсілі – дұрыс бөл-шекті қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеу (6-тарау, 6.3 параграфты қараңыз). Ал қарапайым бөлшектерді интегралдау әдістері 7.2.1 п. және 7.2.2 (4-мысал) қарастырылды. Олай болса, кез келген рационал бөлшектің алғашқы функциясы – элементар функция.

1-мысал. Есептеу керек: $\int \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx.$

▼ Бұл бұрыс бөлшек: m=6, n=3, m>n. Алымын бөліміне «бұрыштап» бөліп, берілген бөлшекті

$$\frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3-2x^2+x} = x^3+2x^2+6x+10+\frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x} \qquad (2')$$

түрінде, яғни көпмүшелік пен дұрыс бөлшек қосындысына жіктеуге болатынын көрсетсек, онда негізгі мәселе дұрыс бөлшекті интегралдауға келіп тіреледі, өйткені көпмүшелікті интегралдау бізге белгілі. (2′) теңдігін көрсетейік:

$$\begin{array}{l|l}
x^6+3x^4+3x^2+1 & x^3-2x^2+x \\ \cline{2-2}
 & x^3+2x^2+6x+10
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^6-2x^5+x^4} \\
\quad 2x^5+2x^4+3x^2+1 \\
\quad \underline{2x^5-4x^4+2x^3} \\
\qquad 6x^4-2x^3+3x^2+1 \\
\qquad \underline{6x^4-12x^3+6x^2} \\
\qquad\quad 10x^3-3x^2+1 \\
\qquad\quad \underline{10x^3-20x^2+10x} \\
\qquad\qquad 17x^2-10x+1
\end{array}$$

Дұрыс бөлшекті интегралдау үшін оны қарапайым бөлшектер қосындысына жіктейміз (Жоғары математика-1, 3.2.3. п. қараңыз):

$$x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2,$$

$$\frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x}=\frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Бөлшектердің алымдарын теңестірсек

$$17x^2-10x+1\equiv A(x-1)^2+B\cdot x\cdot(x-1)+C\cdot x$$

тепе-теңдігіне келеміз. A мен C-ны x-ке сәйкес $x=0$ және $x=1$ мәндерін бере отырып табуға болады:

$$x=0,\ 1=A;\quad x=1,\ 17\cdot 1^2-1\cdot 1+1=C,\ \ C=8.$$

Ал B-ны табу үшін, оған қатысты бір теңдеу алсақ болғаны. Мысалы, тепе-теңдіктегі x^2 коэффициенттерін теңестірейік:

$$17=A+B \quad \text{немесе} \quad 17=1+B,\quad B=16.$$

Сонымен $\dfrac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{x-1}+\dfrac{8}{(x-1)^2}$. Алынған қосындыны (2′) теңдігіне қойып, бастапқы бөлшектің интегралын табамыз.

$$\int\frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx=\int\left[x^3+2x^2+6x+10+\frac{1}{x}+\frac{16}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}\right]dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+3x^2+10x+\ln|x|+16\ln|x-1|-\frac{8}{x-1}+C=$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+3x^2+10x+\ln\left|x\cdot(x-1)^{16}\right|-\frac{8}{x-1}+C. \quad \blacktriangle$$

2-мысал. Табу керек **:** $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}.$

▼ Интеграл астында дұрыс бөлшек тұр: $m=0$, $n=5$, $(m<n)$. Оны қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейміз:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Бөлшектердің алымдарын теңестірсек

$$1 = A(x^2+1)^2 + Bx^2(x^2+1) + Cx(x^2+1) + Dx^2 + Ex.$$

x=0 деп алсақ, A=1. x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіріп, келесі жүйені аламыз:

$$0 = C, \quad 0 = 2A + B + D, \quad 0 = C + E,$$

яғни $B = -1$, C=0, $D = -1$, E=0. Олай болса

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right] dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-2} d(x^2+1) =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C. \quad \blacktriangle$$

7.2.4. Кейбір иррационал функцияларды интегралдау

Рационал емес элементар функциялардың интегралдарын айнымал ауыстыру арқылы рационал функцияның интегралына келтіруге болатын (бұл, **интегралды рационалдау** деп аталып кеткен) жағдайларды қарастырайық.

$R(x, y)$ – өз аргументтерінің, яғни x пен y-тің рационал функциясы болсын. Ол – $R(x, y)$ өрнегін алу үшін x пен y-ке тек арифметикалық амалдар қолданылады деген сөз.

I. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$ интегралын есептеу керек, мұндағы a, b, c, d – тұрақты сандар, m – натурал сан, $ad - bc \neq 0.$ Интеграл астындағы функция **сызықты-бөлшек иррационалдық** деп аталады.

▼ Бұл иррационалдық $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ түріндегі ауыстыру арқылы рационалданады. Бұл ауыстырудан $t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{b - \ d^m}{c\ {}^m t -}$

аламыз (көз жеткізіңіз). Ал $x=\dfrac{b-dt^m}{ct^m-a}$; $dx=\dfrac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt$ өрнектері – рационал функциялар болғандықтан, олардың рационал функциясы – рационал функция.

1-мысал.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2+(\sqrt[6]{x})^3}=\left|\begin{array}{l}\sqrt[6]{x}=t,\ x=t^6\\ dx=6t^5dt\end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=$$

$$=6\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{dt}{1+t}=2t^3-3t^2+6t-\ln|1+t|+C=$$

$$=2\cdot\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C\ .$$

II. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ интегралын есептеу керек, мұндағы $a,b,c-$ тұрақты сандар. Интеграл астындағы функция **квадрат-тық иррационал функция** деп аталады.

Егер x_1,x_2 мәндері ax^2+bx+c квадрат үшмүшелігінің нақты түбірлері болса, онда $ax^2+bx+c\ =a(x-x_1)(x-x_2)$ болады да,

$$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})=\ =R\left(x,(x-x_1)\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}a}\right)=R_1\left(x,\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right)$$

аламыз, яғни I-түрдегі сызықты-бөлшек иррационалдыққа келеміз.

Енді $D=b^2-4ac<0$ деп алайық. Егер $a>0$ болса, онда интегралды келесі **Эйлер ауыстыруы**

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a} \tag{Э.а}$$

арқылы рационалдауға болады. Өйткені Эйлер ауыстыруынан $ax^2+bx+c=t^2-2tx\sqrt{a}+ax^2\Rightarrow\ x=\dfrac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}$ аламыз. Бұны (Э.а) оң жағына қойсақ, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}=t-\dfrac{t^2-c}{2t\cdot\sqrt{a}+b}\sqrt{a}$ түріндегі рационал функцияны аламыз.

Егер $a<0$, $c>0$ $(ax^2+bx+c\geq 0)$ болса, онда

$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$, $(a<0,\ c>0)$ ауыстыруын жасауға болады.

2-мысал. Есептеу керек: $\int\sqrt{4+x^2}\,dx.$

▼ x^2+4 биномының нақты түбірлері жоқ. Эйлер ауыстыруын қолданайық:

$\sqrt{x^2+4}=t-x \;\Rightarrow\; x^2+4=t^2-2tx+x^2 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{t^2-4}{2t}$, олай болса $\sqrt{x^2+4}=t-\dfrac{t^2-4}{2t}=\dfrac{t^2+4}{2t}$. Бұдан x пен $\sqrt{x^2+4}$ шамаларының көбейтіндісін $x\sqrt{x^2+4}=\dfrac{t^2-4}{2t}\cdot\dfrac{t^2+4}{2t}=\dfrac{t^4-16}{4t^2}$ және x-тің дифференциалын $dx=d\left(\dfrac{t^2-4}{2t}\right)=d\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{2}{t}\right)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{t^2}\right)dt$ аламыз. Осы өрнектерді берілген интегралға қойсақ,

$$\int\sqrt{4+x^2}\,dx=\int\frac{t^2+4}{2t}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t^2}\right)dt=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{8}{t}+\frac{16}{t^3}\right)dt=$$

$$=2\ln|t|+\frac{t^2}{8}-\frac{16}{8t^2}+C=2\ln|t|+\frac{t^4-16}{8t^2}+C=$$

$$=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+C$$ аламыз. ▲

1-ескерту. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ интегралындағы квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп, содан соң $u = x + \dfrac{b}{2a}$ айнымал ауыстыруын жасасақ, келесі үш интегралдың біріне келеміз:

$$1) \int R(u, \sqrt{l^2-u^2})du, \;\; 2) \int R(u, \sqrt{l^2+u^2})du, \;\; 3) \int R(u, \sqrt{u^2-l^2})du.$$

Бұларды мысалы, сәйкес $u = l\cdot \sin t,$ $u = l \cdot \mathrm{tg}\, t,$ $u = l \cdot \dfrac{1}{\cos t}$ тригонометриялық айнымал ауыстырулары арқылы рационалдауға болады.

2-ескерту. $\int \dfrac{dx}{(mx+n)^r \sqrt{ax^2+bx+c}},$ $r = 1,2$ түріндегі интеграл $mx+n = \dfrac{1}{t}$ айнымал ауыстыруы арқылы жоғарыда қарастырылған интегралдардың біріне келеді.

Біз осыған дейін алгебралық (рационал және иррационал) функциялардың интегралдарын қарастырып келдік. Енді тригонометриялық функциялардың интегралдарын қарастырамыз.

§ 7.3. Тригонометриялық функцияларды интегралдау

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \tag{1}$$

түріндегі интеграл

$$u = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \tag{2}$$

айнымал ауыстыруы арқылы әрқашанда рационал функцияның интегралына келеді. Расында да,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \tag{3}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad (4)$$

$$u = tg\frac{x}{2} \;\Rightarrow\; x = 2\operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}, \qquad (5)$$

демек, $\sin x$, $\cos x$, dx рационал функциялар арқылы өрнек-теледі. Ал рационал функциялардың рационал функциясы рационал функция болатыны белгілі.

1-мысал. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ интегралын табу керек.

▼Егер $u = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ деп алсақ, онда ((4), (5) қараңыз) $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$. Сондықтан

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left| u = tg\frac{x}{2} \right| = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3 + 5\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int \frac{du}{8-2u^2} =$$

Мысалы,

▼ $$\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x dx}{\cos^{\frac{4}{3}} x} = -\int \cos^{\frac{-4}{3}} x \cdot (1 - \cos^2 x) d(\cos x) =$$

$$= -\int \left(\cos^{\frac{-4}{3}} x - \cos^{\frac{2}{3}} x \right) d(\cos x) = 3\cos^{-\frac{1}{3}} x + 3\frac{\cos^{\frac{5}{3}} x}{5} + C =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{\cos^5} + C.$$ ▲

б) Егер m мен n ***теріс емес бүтін жұп сандар*** болса, онда дәреже төмендету формулаларын:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ ,\quad \sin x\cdot\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$$

пайдалануға болады. **Мысалы,**

$$\blacktriangledown\quad \int\sin^2 x\cdot\cos^4 x dx=\int(\sin x\cdot\cos x)^2\cdot\cos^2 x dx=$$

$$=\int\frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.\quad\blacktriangle$$

в) Егер $m+n=-2k,\ \ k\in N,$ яғни $m+n$ ***теріс таңбалы бүтін жұп сан*** болса, онда $u=\operatorname{tg}x$ немесе $u=\operatorname{ctg}x$ ауыстыруын жасауға болады.

Мысалы,

$$\blacktriangledown\quad \int\frac{\sin^{\frac{1}{3}}x}{\sqrt[3]{\cos^{13}x}}dx=\left|\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{3},\ n=-\dfrac{13}{3} \\ m+n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{13}{3}=-4\end{array}\right|=\int\frac{\sin^{\frac{1}{3}}x}{\cos^{\frac{1}{3}}x\cdot\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} d(tgx)=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x\end{array}\right|=\ =\int\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}}x(1+\operatorname{tg}^2 x)d(\operatorname{tg}x)=$$

$$=\int\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}}xd(\operatorname{tg}x)+\int\operatorname{tg}^{\frac{7}{3}}x\,d(\operatorname{tg}x)=\frac{3\operatorname{tg}^{\frac{4}{3}}x}{4}+\frac{3\cdot\operatorname{tg}^{\frac{10}{3}}x}{10}+C.\quad\blacktriangle$$

Жалпы жағдайда (6) интегралды рекуррентік формула көмегімен есептеуге болады.

Мысалы,

$$\int\frac{dx}{\cos^{2k+1}x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^{2k+1}x}dx=\int\sin x\cdot\frac{\sin x\cdot dx}{\cos^{2k+1}x}+\int\frac{dx}{\cos^{2k-1}x}=$$

$$=\begin{vmatrix} u=\sin x \quad dv=\dfrac{\sin xdx}{\cos^{2k+1}x} \\ du=\cos xdx, \quad v=\int\dfrac{\sin xdx}{\cos^{2k+1}x}=-\int\cos^{-2k-1}xd(\cos x)=\dfrac{1}{2k\cos^{2k}x} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\sin x}{2k\cos^{2k}x}-\frac{1}{2k}\int\frac{dx}{\cos^{2k-1}x}+\int\frac{dx}{\cos^{2k-1}x},$$

яғни, $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^{2k+1}x}=\frac{\sin x}{2k\cos^{2k}x}+\left(1-\frac{1}{2k}\right)\int\frac{dx}{\cos^{2k-1}x}.$

Дербес жағдайда, $k=1$ болса, онда:

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

- $\int\cos mx\cdot\cos nx\cdot dx,\quad \int\sin mx\cdot\cos nx\cdot dx,\quad \int\sin mx\cdot\sin nx\cdot dx$

түрлеріндегі интегралдарды кестелік интегралдарға келтіру үшін ***келесі, көбейтіндіні қосындыға түрлендіру формулаларын қолдануға болады:***

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]\ .$$

Мысалы,

▼ $\displaystyle\int\cos 2x\cdot\cos 4xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x+\cos 6x)dx=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 6x+C\ .$$ ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Алғашқы функция анықтамасын келтіріңіз. Берілген функцияның берілген аралықтағы алғашқы функциясы жалғыз бола ма?
2. Анықталмаған интеграл деген не және оны қандай символмен белгілейді? Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттерін атап, оларды дәлелдеңіз.
3. Негізгі интегралдар кестесін жазыңыз және оларды дәлелдеңіз.
4. $\int (x+1)^2\,dx$ интегралын екі тәсілмен: а) аргументі $(x+1)$ болатын дәрежелік функцияның интегралы деп алып; б) жақшаны ашып, қосындының интегралы деп алып, табыңыз. Алынған нәтижелердің біріне-бірі қайшы келмейтінін түсіндіріңіз.
5. Айнымал ауыстыру арқылы анықталмаған интегралдарды есептеу әдісін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.
6. Мысалдар арқылы келесі интегралдарды есептеу тәсілдерін көрсетіңіз:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}, \quad \int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2 + px + q}, \quad \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}.$$

7. Анықталмаған интегралдар үшін бөліктеп интегралдау формуласын қорытып шығарыңыз. Мысал келтіріңіз.
8. Рационал бөлшектерді интегралдау әдістерін түсіндіріңіз. Мысалдар келтіріңіз.
9. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ интегралын есептеу әдісін түсіндіріңіз (R – рационал функция). Мысал келтіріңіз.
10. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ интегралын есептеу әдістерін түсіндіріңіз (R – рационал функция). Мысал келтіріңіз.
11. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ интегралын есептеу әдісін түсіндіріңіз (R – рационал функция). Мысал келтіріңіз.

12. Егер $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$ интегралында n немесе m сандарының ең болмағанда біреуі тақ болса, онда оны интегралдау әдісін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

13. Егер $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$ интегралында n немесе m сандары теріс емес жұп бүтін болса, онда оны интегралдау әдісін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

14. Егер $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$ интегралында $n,\ m$ сандары үшін $n+m=-2k,\ \ k\in N$ теңдігі орындалса, онда оны интегралдау әдісін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

15. $\int \cos mx \cdot \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \cdot \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx\, dx$ түріндегі интегралдарды есептеу әдістерін көрсетіңіз. Мысалдар келтіріңіз.

Анықталмаған интегралды табыңдар.

1. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$ **(Жауабы:** $\dfrac{x}{4}\left(x^2-2\right)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\dfrac{x}{2}+C.$**)**

2. $\int \dfrac{dx}{\left(x^2+4\right)\sqrt{4x^2+1}}.$ **(Жауабы:** $\dfrac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right|+C.$**)**

3. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx.$ **(Жауабы:** $\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3x\right)^3}+C.$**)**

4. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$ **(Жауабы:** $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C.$**)**

5. $\int \arccos\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\,dx.$ **(Жауабы:** $\arccos\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\sqrt{x}-\mathrm{arctg}\sqrt{x}+C.$**)**

6. $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$. **(Жауабы:** $\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C.$**)**

7. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x+1}\left(\ln(x+1)-2\right)+C.$**)**

8. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx.$ **(Жауабы:** $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2\right) + C.$**)**

7.1-ҮТ

Анықталмаған интегралдарды табыңыз

(№ 1-5 тапсырмаларда интегралдау нәтижесін дифференциалдау арқылы тексеріңіз**)**

1.

1.1. $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx.$

1.2. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx.$

1.3. $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx.$

1.4. $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx.$

1.5. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx.$

1.6. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx.$

1.7. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{x} + 3\right)dx.$

1.8. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx.$

1.9. $\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}dx.$

1.10. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx.$

1.11. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}dx.$

1.12. $\int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1\right)dx.$

1.13. $\int\left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx.$

1.14. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx.$

1.15. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx.$

1.16. $\int\frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}dx.$

1.17. $\int\left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx.$

1.18. $\int\frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2}dx.$

1.19. $\int\frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x^3}dx.$

1.20. $\int\frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}dx.$

1.21. $\int\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx.$

1.22. $\int\frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}dx.$

1.23. $\int\frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx.$

1.24. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx.$

1.25. $\int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx.$

1.26. $\int\frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx.$

1.27. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx.$

1.28. $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx.$

1.29. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx.$

1.30. $\int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx.$

2.

2.1. $\int\sqrt{3+x}\,dx.$

2.2. $\int\sqrt[3]{1+x}\,dx.$

2.3. $\int\sqrt[3]{(1+x)^2}\,dx.$

2.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$

2.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}$.

2.6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$.

2.7. $\int (1-4x)^7 dx$.

2.8. $\int (1+4x)^5 dx$.

2.9. $\int (1-3x)^4 dx$.

2.10. $\int \sqrt{1+3x}\, dx$.

2.11. $\int \sqrt{5-4x}\, dx$.

2.12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$.

2.13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$.

2.14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$.

2.15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$.

2.16. $\int \sqrt[5]{3-2x}\, dx$.

2.17. $\int \sqrt[4]{1+3x}\, dx$.

2.18. $\int \sqrt[3]{1+3x}\, dx$.

2.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$.

2.20. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}$.

2.21. $\int \frac{dx}{(2+x)^3}$.

2.22. $\int \sqrt[3]{5-2x}\, dx$.

2.23. $\int \sqrt{5-4x}\, dx$.

2.24. $\int \sqrt[5]{(6-5x)^2}\, dx$.

2.25. $\int \sqrt[4]{2-5x}\, dx$.

2.26. $\int \sqrt[3]{4-2x}\, dx$.

2.27. $\int \sqrt{3-4x}\, dx$.

2.28. $\int \sqrt[5]{3+2x}\, dx$.

2.29. $\int \sqrt[4]{(3+5x)^3}\, dx$.

2.30. $\int \sqrt[3]{(2-x)^2}\, dx$.

3 .

3.1. $\int \frac{dx}{3-x}$. **3.2.** $\int \frac{dx}{3x+9}$. **3.3.** $\int \frac{dx}{2-3x}$.

3.4. $\int \frac{dx}{1-4x}$. **3.5.** $\int \frac{dx}{2+3x}$. **3.6.** $\int \frac{dx}{2-5x}$.

3.7. $\int \frac{dx}{3x-2}$. **3.8.** $\int \frac{dx}{2x+3}$. **3.9.** $\int \frac{dx}{3x-4}$.

3.10. $\int \frac{dx}{4-3x}$. **3.11.** $\int \frac{dx}{3x+4}$. **3.12.** $\int \frac{dx}{4x-2}$.

3.13. $\int \frac{dx}{5-3x}$. **3.14.** $\int \frac{dx}{4-7x}$. **3.15.** $\int \frac{dx}{5x-3}$.

3.16. $\int \frac{dx}{3-2x}$. **3.17.** $\int \frac{dx}{5+3x}$. **3.18.** $\int \frac{dx}{3-5x}$.

3.19. $\int \frac{dx}{5+4x}$. **3.20.** $\int \frac{dx}{6-3x}$. **3.21.** $\int \frac{dx}{6+5x}$.

3.22. $\int \frac{dx}{1-7x}$. **3.23.** $\int \frac{dx}{1+6x}$. **3.24.** $\int \frac{dx}{2+7x}$.

3.25. $\int \frac{dx}{7-3x}$. **3.26.** $\int \frac{dx}{5-2x}$. **3.27.** $\int \frac{dx}{2x+7}$.

3.28. $\int \frac{dx}{2x+9}$. **3.29.** $\int \frac{dx}{7x-3}$. **3.30.** $\int \frac{dx}{6x+1}$.

4 .

4.1. $\int \sin(2-3x)\,dx$. **4.2.** $\int \sin(3-2x)\,dx$.

4.3. $\int \sin(5-3x)\,dx$. **4.4.** $\int \cos(2+3x)\,dx$.

4.5. $\int \cos(3+2x)\,dx$. **4.6.** $\int \sin(4-2x)\,dx$.

4.7. $\int \cos(5-2x)\,dx.$ **4.8.** $\int \cos(7x+3)\,dx.$

4.9. $\int \sin(8x-3)\,dx.$ **4.10.** $\int \sin(3+4x)\,dx.$

4.11. $\int \sin(3-4x)\,dx.$ **4.12.** $\int \cos(4x+3)\,dx.$

4.13. $\int \cos(3-4x)\,dx.$ **4.14.** $\int \cos(2+5x)\,dx.$

4.15. $\int \cos(3x+5)\,dx.$ **4.16.** $\int \sin(5x-3)\,dx.$

4.17. $\int \sin(5-3x)\,dx.$ **4.18.** $\int \sin(3x+6)\,dx.$

4.19. $\int \cos(5x-8)\,dx.$ **4.20.** $\int \cos(3x-7)\,dx.$

4.21. $\int \cos(5x-6)\,dx.$ **4.22.** $\int \sin(7x+1)\,dx.$

4.23. $\int \cos(7x+3)\,dx.$ **4.24.** $\int \sin(7-4x)\,dx.$

4.25. $\int \cos(3x-7)\,dx.$ **4.26.** $\int \sin(8x-5)\,dx.$

4.27. $\int \cos(8x-4)\,dx.$ **4.28.** $\int \sin(9x-1)\,dx.$

4.29. $\int \cos(10x-3)\,dx.$ **4.30.** $\int \sin(9x+7)\,dx.$

5.

5.1. $\int \frac{\sqrt{3}\,dx}{9x^2-3}.$ **5.2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}.$ **5.3.** $\int \frac{dx}{9x^2+3}.$

5.4. $\int \frac{9\,dx}{\sqrt{9x^2-3}}.$ **5.5.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}.$ **5.6.** $\int \frac{dx}{7x^2-4}.$

5.7. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{7x^2-4}}.$ **5.8.** $\int \frac{dx}{5x^2+3}.$ **5.9.** $\int \frac{dx}{5x^2-3}.$

5.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}.$ **5.11.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}.$ **5.12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}.$

5.13. $\int \frac{\sqrt{5}\,dx}{\sqrt{3-4x^2}}$. **5.14.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$. **5.15.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+7}}$.

5.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$. **5.17.** $\int \frac{dx}{3x^2+2}$. **5.18.** $\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{7-2x^2}}$.

5.19. $\int \frac{\sqrt{14}\,dx}{2x^2-7}$. **5.20.** $\int \frac{dx}{8x^2+9}$. **5.21.** $\int \frac{dx}{3x^2-2}$.

5.22. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$. **5.23.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$. **5.24.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

5.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$. **5.26.** $\int \frac{dx}{4x^2-3}$. **5.27.** $\int \frac{dx}{8x^2-9}$.

5.28. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$. **5.29.** $\int \frac{2\,dx}{4+3x^2}$. **5.30.** $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

6.

6.1. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{5-4x^2}}$. **6.2.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-3x^2}}$. **6.3.** $\int \frac{3x\,dx}{4x^2+1}$.

6.4. $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{3-4x^2}}$. **6.5.** $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{8x^2-9}}$. **6.6.** $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{4x^2+3}}$.

6.7. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-8x^2}}$. **6.8.** $\int \frac{\sqrt{3}x\,dx}{\sqrt{3x^2-2}}$. **6.9.** $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

6.10. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{7-2x^2}}$. **6.11.** $\int \frac{x\,dx}{2x^2-7}$. **6.12.** $\int \frac{x\,dx}{3x^2+8}$.

6.13. $\int \frac{2x\,dx}{3x^2-7}$. **6.14.** $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{2x^2+5}}$. **6.15.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7-3x^2}}$.

6.16. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+9}$. **6.17.** $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. **6.18.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+8}}$.

6.19. $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{5x^2+3}}$. **6.20.** $\int \frac{x\,dx}{3x^2-6}$. **6.21.** $\int \frac{x\,dx}{5x^2+1}$.

6.22. $\int \frac{5x\,dx}{5x^2-3}$. **6.23.** $\int \frac{x\,dx}{2x^2-7}$. **6.24.** $\int \frac{9x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

6.25. $\int \frac{3x\,dx}{9x^2+2}$. **6.26.** $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{7x^2-1}}$. **6.27.** $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{9x^2+5}}$.

6.28. $\int \frac{2x\,dx}{5x^2-3}$. **6.29.** $\int \frac{x\,dx}{3x^2-2}$. **6.30.** $\int \frac{7x\,dx}{7x^2+1}$.

7.

7.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$. **7.2.** $\int \frac{dx}{2x^2-5}$. **7.3.** $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$.

7.4. $\int \frac{dx}{5x^2+2}$. **7.5.** $\int \frac{dx}{2x^2+3}$. **7.6.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2}+1}$.

7.7. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$. **7.8.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$. **7.9.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2}}$.

7.10. $\int \frac{dx}{5x^2-4}$. **7.11.** $\int \frac{dx}{3x^2-7}$. **7.12.** $\int \frac{dx}{3x^2+7}$.

7.13. $\int \frac{dx}{6x^2-7}$. **7.14.** $\int \frac{dx}{7x^2+6}$. **7.15.** $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$.

7.16. $\int \frac{dx}{6x^2+1}$. **7.17.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}$. **7.18.** $\int \frac{dx}{3x^2-5}$.

7.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$. **7.20.** $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$. **7.21.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+8}}$.

7.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$. **7.23.** $\int \frac{dx}{2x^2+7}$. **7.24.** $\int \frac{dx}{4x^2-3}$.

7.25. $\int \frac{dx}{3x^2+4}$. **7.26.** $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-9}}$. **7.27.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

7.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. **7.29.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}$. **7.30.** $\int \frac{dx}{3x^2-2}$.

8.

8.1. $\int e^{2x-7}dx$. **8.2.** $\int e^{3+5x}dx$. **8.3.** $\int e^{2-3x}dx$.

8.4. $\int e^{2x+1}dx$. **8.5.** $\int e^{7x-2}dx$. **8.6.** $\int e^{5x-7}dx$.

8.7. $\int e^{5x+7}dx$. **8.8.** $\int e^{7-2x}dx$. **8.9.** $\int e^{3-4x}dx$.

8.10. $\int e^{10x+2}dx$. **8.11.** $\int e^{2x-10}dx$. **8.12.** $\int e^{4x+3}dx$.

8.13. $\int e^{4x+5}dx$. **8.14.** $\int e^{6x-1}dx$. **8.15.** $\int e^{5-2x}dx$.

8.16. $\int e^{4-3x}dx$. **8.17.** $\int e^{3-5x}dx$. **8.18.** $\int e^{1-4x}dx$.

8.19. $\int e^{2-5x}dx$. **8.20.** $\int e^{6x-4}dx$. **8.21.** $\int e^{8x+1}dx$.

8.22. $\int e^{2-6x}dx$. **8.23.** $\int e^{2-4x}dx$. **8.24.** $\int e^{3-6x}dx$.

8.25. $\int e^{4-5x}dx$. **8.26.** $\int e^{5-x}dx$. **8.27.** $\int e^{7+3x}dx$.

8.28. $\int e^{2x+3}dx$. **8.29.** $\int e^{8x+1}dx$. **8.30.** $\int e^{4-7x}dx$.

9.

9.1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$. **9.2.** $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1}dx$.

9.3. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$. **9.4.** $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$.

9.5. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{x-1}dx$. **9.6.** $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx$.

9.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx.$

9.8. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$

9.9. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}.$

9.10. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx.$

9.11. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1}dx.$

9.12. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx.$

9.13. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+1)}}{x+1}dx.$

9.14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[5]{\ln(x+1)}}.$

9.15. $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{x+1}dx.$

9.16. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}.$

9.17. $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1}dx.$

9.18. $\int \frac{dx}{(x-3)\ln^4(x-3)}.$

9.19. $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}.$

9.20. $\int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5}dx.$

9.21. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{x+4}dx.$

9.22. $\int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7}dx.$

9.23. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}}{x+3}dx.$

9.24. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{x-5}dx.$

9.25. $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}.$

9.26. $\int \frac{\ln^5(x-8)}{x-8}dx.$

9.27. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+6)}}{x+6}dx.$

9.28. $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}.$

9.29. $\int \frac{\ln^6(x+9)}{x+9}dx.$

9.30. $\int \frac{\ln(3x+5)}{(3x+5)}dx.$

10.

10.1. $\int \sin^4 2x\cos 2x\,dx.$

10.2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx.$

10.3. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx.$

10.4. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx.$

10.5. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx.$

10.6. $\int \cos^7 2x\sin 2x\,dx.$

10.7. $\int \frac{\cos x}{\sin x+2}dx.$

10.8. $\int \frac{\cos x}{3-\sin x}dx.$

10.9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x+3}}dx.$

10.10. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x+1}}dx.$

10.11. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x-4)^3}}dx.$

10.12. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx.$

10.13. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx.$

10.14. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x}dx.$

10.15. $\int \sin^3 4x\cos 4x\,dx.$

10.16. $\int \sqrt[3]{\cos 2x}\sin 2x\,dx.$

10.17. $\int \sqrt{\cos^3 2x}\sin 2x\,dx.$

10.18. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}dx.$

10.19. $\int \sin^3 5x\cos 5x\,dx.$

10.20. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}dx.$

10.21. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x}dx.$

10.22. $\int \sqrt{\cos 7x}\sin 7x\,dx.$

10.23. $\int \sin^6 3x\cos 3x\,dx.$

10.24. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x}dx.$

10.25. $\int \sqrt{\cos^3 2x}\sin 2x\,dx.$

10.26. $\int \sin^4 8x\cos 8x\,dx.$

10.27. $\int \sin^5 4x\cos 4x\,dx.$

10.28. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}}dx.$

10.29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}}dx.$

10.30. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x}dx.$

11.

11.1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x}dx.$

11.2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}.$

11.3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\operatorname{ctg}^4 x}.$

11.4. $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x}dx.$

11.5. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\cos^2 4x}dx.$

11.6. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}}{\cos^2 5x}dx.$

11.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}dx.$

11.8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\operatorname{ctg}^3 x}.$

11.9. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x\operatorname{tg}^4 3x}.$

11.10. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x}dx.$

11.11. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x}dx.$

11.12. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 7x}{\cos^2 7x}dx.$

11.13. $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x}dx.$

11.14. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x}dx.$

11.15. $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x}dx.$

11.16. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x\sqrt{\operatorname{tg} 4x}}.$

11.17. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x\operatorname{ctg}^3 3x}.$

11.18. $\int \frac{\operatorname{tg} 6x}{\cos^2 6x}dx.$

11.19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}.$

11.20. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x} dx.$

11.21. $\int \frac{ctg^5 4x}{\sin^2 4x} dx.$

11.22. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 7x}}{\cos^2 7x} dx.$

11.23. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x} dx.$

11.24. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 5x}}{\sin^2 5x} dx.$

11.25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[5]{\operatorname{ctg}^4 x}}.$

11.26. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}}.$

11.27. $\int \frac{\operatorname{tg}^6 2x}{\cos^2 2x} dx.$

11.28. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x} dx.$

11.29. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x} dx.$

11.30. $\int \frac{\operatorname{tg}^7 3x}{\cos^2 3x} dx.$

12.

12.1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^6 3x}}{1+9x^2} dx.$

12.2. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

12.3. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

12.4. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^3 2x}{1+4x^2} dx.$

12.5. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

12.6. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}.$

12.7. $\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

12.8. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}}{1+x^2} dx.$

12.9. $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$

12.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^4 x}.$

12.11. $\int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

12.12. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^7 3x}{1+9x^2}dx.$

12.13. $\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx.$

12.14. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

12.15. $\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

12.16. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}^7 x}.$

12.17. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx.$

12.18. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^6 3x}{1+9x^2}dx.$

12.19. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arcctg}^3 x}}{1+x^2}dx.$

12.20. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}.$

12.21. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}^5 x}.$

12.22. $\int \frac{\arccos^7 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

12.23. $\frac{\sqrt[3]{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

12.24. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 5x}{1+25x^2}dx.$

12.25. $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$

12.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}.$

12.27. $\int \frac{\operatorname{arctg}^8 3x}{1+9x^2}dx.$

12.28. $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}}dx.$

12.29. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2}dx.$

12.30. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 8x}{1+64x^2}dx.$

13.

13.1. $\int \frac{x\,dx}{e^{3x^2+4}}.$

13.2. $\int \frac{x\,dx}{e^{x^2+3}}.$

13.3. $\int \frac{x^2 dx}{e^{x^3+1}}$.

13.4. $\int e^{\cos x} \sin x\, dx$.

13.5. $\int e^{2x^3-1} x^2 dx$.

13.6. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$.

13.7. $\int e^{7x^2+2} x\, dx$.

13.8. $\int e^{3-x^2} x\, dx$.

13.9. $\int e^{4x^2+5} x\, dx$.

13.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\, e^{\arcsin x}}$.

13.11. $\int e^{5x^2-3} x\, dx$.

13.12. $\int e^{1-4x^2} x\, dx$.

13.13. $\int e^{3x^2+4} x\, dx$.

13.14. $\int e^{\sin x+1} \cos x\, dx$.

13.15. $\int e^{4-x^2} x\, dx$.

13.16. $\int e^{tgx} \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

13.17. $\int e^{3\cos x+2} \sin x\, dx$.

13.18. $\int e^{4\sin x-1} \cos x\, dx$.

13.19. $\int e^{5x^2-3} x\, dx$.

13.20. $\int e^{5-2x^2} x\, dx$.

13.21. $\int e^{4-3x^2} x\, dx$.

13.22. $\int e^{\cos 2x} \sin 2x\, dx$.

13.23. $\int e^{1-6x^2} x\, dx$.

13.24. $\int e^{x^3+1} x^2 dx$.

13.25. $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2} dx$.

13.26. $\int e^{3x^3} x^2 dx$.

13.27. $\int \frac{x^4}{e^{x^5+1}} dx$.

13.28. $\int \frac{x}{e^{x^2-3}} dx$.

13.29. $\int \frac{x}{e^{2x^2+1}} dx$.

13.30. $\int e^{4-5x^2} x\, dx$.

14.

14.1. $\int \frac{x-1}{7x^2+4} dx$.

14.2. $\int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx$.

14.3. $\int \frac{2x+1}{5x^2+1}\,dx.$

14.4. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx.$

14.5. $\int \frac{3x-2}{2x^2+7}\,dx.$

14.6. $\int \frac{5-x}{3x^2+1}\,dx.$

14.7. $\int \frac{5+x}{3x^2+1}\,dx.$

14.8. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}}\,dx.$

14.9. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx.$

14.10. $\int \frac{3x-2}{3x^2+1}\,dx.$

14.11. $\int \frac{x-1}{5-2x^2}\,dx.$

14.12. $\int \frac{2x+3}{1-3x^2}\,dx.$

14.13. $\int \frac{2x+3}{5x^2+2}\,dx.$

14.14. $\int \frac{x-3}{4x^2+1}\,dx.$

14.15. $\int \frac{x-3}{1-4x^2}\,dx.$

14.16. $\int \frac{3x-1}{4-x^2}\,dx.$

14.17. $\int \frac{5x-2}{x^2+9}\,dx.$

14.18. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx.$

14.19. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}}\,dx.$

14.20. $\int \frac{2x-4}{x^2+16}\,dx.$

14.21. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

14.22. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}}\,dx.$

14.23. $\int \frac{3x+4}{5-2x^2}\,dx.$

14.24. $\int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

14.25. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx.$

14.26. $\int \frac{3-2x}{x^2-8}\,dx.$

14.27. $\int \frac{x-5}{8-4x^2}\,dx.$

14.28. $\int \frac{x+4}{7x^2+3}\,dx.$

14.29. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}dx.$ **14.30.** $\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}}dx.$

7.1– шығару үлгісі (§ 7.2; 7.2.1 *п. қараңыз*)

Анықталмаған интегралдарды табу керек (**1-5** ***тапсыр малардың интегралдарының нәтижелерін дифференциалдап тексеру керек***).

$$\mathbf{1.}\quad \int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx.$$

► Интеграл астындағы функцияны бөліміне бөліп және § 7.1, 3° а), б) қасиеттерін, сонымен бірге анықталмаған интегралдардың негізгі кестесін пайдаланып табамыз:

$$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\int x^{-\frac{1}{4}}dx - 2\int x^{\frac{15}{4}}dx + \int x^{\frac{5}{12}}dx =$$

$$= 4x^{\frac{3}{4}} - \frac{8}{19}x^{\frac{19}{4}} + \frac{12}{17}x^{\frac{17}{12}} + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C.$$

Алынған нәтижені тексереміз:

$$\left(4x^{\frac{3}{4}} - \frac{8}{19}x^{\frac{19}{4}} + \frac{12}{17}x^{\frac{17}{12}} + C\right)' = 4\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{8}{19}\frac{19}{4}x^{\frac{15}{4}} + \frac{12}{17}\frac{17}{12}x^{\frac{5}{12}} =$$

$$= 3x^{-\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{15}{4}} + x^{\frac{5}{12}}. \quad ◄$$

Назарыңызға: 7.2.1п. 1 а,б мысалдарды қараңыз.

$$\mathbf{2.}\quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}}.$$

► § 7.1, 4°-қасиетті пайдаланамыз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}} = \int (4-8x)^{-\frac{2}{5}} dx = -\frac{5}{8 \cdot 3}(4-8x)^{\frac{3}{5}} + C = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C.$$

Нәтижені тексереміз:

$$\left(-\frac{5}{24}(4-8x)^{\frac{3}{5}} + C\right)' = -\frac{5}{24}\,\frac{3}{5}(4-8x)^{-\frac{2}{5}}(-8) = (4-8x)^{-\frac{2}{5}}. \quad ◄$$

3. $\int \frac{dx}{6-7x}$.

► §7.1, 3°-қасиетті пайдаланамыз: $\int \frac{dx}{6-7x} = -\frac{1}{7}\ln|6-7x| + C.$

Алынған нәтижені тексереміз:

$$\left(-\frac{1}{7}\ln|6-7x| + C\right)' = -\frac{1}{7}\,\frac{1}{6-7x}\cdot(-7) = \frac{1}{6-7x}. \quad ◄$$

4. $\int \cos(2-5x)\, dx$.

► §7.1, 3°-қасиетті пайдаланамыз:

$$\int \cos(2-5x)\, dx = -\frac{1}{5}\sin(2-5x) + C.$$

Нәтижені тексеруді орындаймыз:

$$\left(-\frac{1}{5}\sin(2-5x) + C\right)' = -\frac{1}{5}\cos(2-5x)\cdot(-5) = \cos(2-5x). \quad ◄$$

5. $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

► § 7.1, 3°-қасиетті пайдаланамыз:

$$\int\frac{3\,dx}{\sqrt{4x^2-3}}=\frac{3}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-3}}=\frac{3}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-3}\right|+C.$$

Алынған нәтижені тексереміз:

$$\left(\frac{3}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-3}\right|+C\right)'=\frac{3}{2}\left(\frac{2+\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}}}{2x+\sqrt{4x^2-3}}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{2\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2-3}\right)\sqrt{4x^2-3}}=\frac{3}{\sqrt{4x^2-3}}. \quad ◄$$

6. $\displaystyle\int\frac{7xdx}{3x^2+4}.$

► Бөлшектің алымын оның бөлімінің туындысы шығатындай етіп түрлендіреміз және 7.2.1п. теореманы пайдаланамыз (1 а, б- мысалды қараңыз):

$$\int\frac{7xdx}{3x^2+4}=\frac{7}{6}\int\frac{6xdx}{3x^2+4}=\frac{7}{6}\ln\left(3x^2+4\right)+C. \quad ◄$$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}.$

► $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d\left(\sqrt{5}x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{5}x\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}}+C.$ ◄

8. $\displaystyle\int e^{5-4x}dx.$

$$\blacktriangleright \quad \int e^{5-4x}dx=-\frac{1}{4}\int e^{5-4x}d\left(5-4x\right)=-\frac{1}{4}e^{5-4x}+C. \quad \blacktriangleleft$$

9. $$\int\frac{\sqrt[7]{\ln^3\left(x+2\right)}}{x+2}\,dx.$$

.$\blacktriangleright$

$$\int\frac{\sqrt[7]{\ln^3\left(x+2\right)}}{x+2}\,dx=\int\ln^{\frac{3}{7}}\left(x+2\right)d\left(\ln\left(x+2\right)\right)=\frac{7}{10}\ln^{\frac{10}{7}}\left(x+2\right)+C=$$

$$=\frac{7}{10}\sqrt[7]{\ln^{10}\left(x+2\right)}+C. \quad \blacktriangleleft$$

10. $$\int\frac{\cos 3x dx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}}.$$

$\blacktriangleright$

$$\int\frac{\cos 3x dx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}}=\frac{1}{3}\int\left(\sin 3x-4\right)^{-\frac{1}{5}}3\cos 3x dx=\frac{1}{3}\int\left(\sin 3x-4\right)^{-\frac{1}{5}}d\left(\sin 3x-4\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{5}{4}\left(\sin 3x-4\right)^{\frac{4}{5}}+C=\frac{5}{12}\sqrt[5]{\left(\sin 3x-4\right)^4}+C. \quad \blacktriangleleft$$

11. $$\int\frac{dx}{\sin^2 4x\,\sqrt[3]{ctg^2 4x}}.$$

$$\blacktriangleright \quad \int\frac{dx}{\sin^2 4x\,\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 4x}}=-\frac{1}{4}\int\operatorname{ctg}^{-\frac{2}{3}}4x\left(-\frac{4}{\sin^2 4x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\int\operatorname{ctg}^{-\frac{2}{3}}4x\,d\left(\operatorname{ctg}4x\right)=-\frac{3}{4}\operatorname{ctg}^{\frac{1}{3}}4x+C=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}4x}+C. \quad \blacktriangleleft$$

12. $$\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^5 2x}}{1+4x^2}\,dx.$$

$$\blacktriangleright\quad \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^5 2x}}{1+4x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \operatorname{arcctg}^{\frac{5}{2}} 2x\left(-\frac{2}{1+4x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \operatorname{arcctg}^{\frac{5}{3}} 2x\, d\left(\operatorname{arcctg} 2x\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{3}{8}\operatorname{arcctg}^{\frac{8}{3}} 2x + C = -\frac{3}{16}\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^8 2x} + C. \quad \blacktriangleleft$$

13. $\int e^{3\cos x+2}\sin x dx.$

$\blacktriangleright$

$$\int e^{3\cos x+2}\sin x dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x+2} d\left(3\cos x+2\right) = -\frac{1}{3}e^{3\cos x+2} + C.$$

$\blacktriangleleft$

14. $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}\,dx.$

$$\blacktriangleright\quad \int \frac{3x+10}{6x^2-4}\,dx = \int \frac{3xdx}{6x^2-4} + 10\int \frac{dx}{6x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{12xdx}{6x^2-4} +$$

$$+\frac{10}{\sqrt{6}}\int \frac{\sqrt{6}dx}{\left(\sqrt{6}x\right)^2-2^2} == \frac{1}{4}\ln\left|6x^2-4\right| + \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}x-2}{\sqrt{6}x+2}\right| + C. \quad \blacktriangleleft$$

7.2–YT

Анықталмаған интегралды табыңыз

1.

1.1 $\int \frac{2-3x}{x^2+2}dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2\right| + C.$

1.2. $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ **Жауабы:** $3\arcsin x + 5\sqrt{1-x^2} + C.$

1.3. $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$ **Жауабы:** $8\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-13\sqrt{x^2-1}+C.$

1.4. $\int \frac{6x+1}{2x^2-1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{2}\ln\left|2x^2-1\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C.$

1.5. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}}dx.$ **Жауабы:** $-\sqrt{2-x^2}-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

1.6. $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{2}\arcsin 2x+\frac{7}{4}\sqrt{1-4x^2}+C.$

1.7. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{5}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2x}+\sqrt{2x^2+1}\right|-\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1}+C.$

1.8. $\int \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}}dx.$ **Жауабы:** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2-x^2}+C.$

1.9. $\int \frac{3x+2}{2x^2+1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{4}\ln\left|2x^2+1\right|+\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{2}x+C.$

1.10. $\int \frac{1-5x}{1+25x^2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{5}\mathrm{arctg}\,5x-\frac{1}{10}\ln\left|1+25x^2\right|+C.$

1.11. $\int \frac{4x-3}{3x^2-4}dx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{3}\ln\left|3x^2-4\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-2}{\sqrt{3}x+2}\right|+C.$

1.12. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}}dx.$ **Жауабы:** $5\sqrt{x^2-6}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-6}\right|+C.$

1.13. $\int \frac{x-3}{9x^2+7}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{18}\ln\left|9x^2+7\right|-\frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{3x}{\sqrt{7}}+C.$

1.14. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2}+\sqrt{4-3x^2}+C.$

1.15. $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$ **Жауабы:** $2\arcsin 2x+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C.$

1.16. $\int \frac{5-x}{2+x^2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|2+x^2\right|+C.$

1.17. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|+\frac{3}{4}\sqrt{1+4x^2}+C.$ **)**

1.18. $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ **Жауабы:** $5\arcsin x+4\sqrt{1-x^2}+C.$

1.19. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}}dx.$ **Жауабы:** $5\sqrt{x^2-3}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C.$

1.20. $\int \frac{1-3x}{4x^2-1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|-\frac{3}{8}\ln\left|4x^2-1\right|+C.$

1.21. $\int \frac{x-5}{3-2x^2}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right|+\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}\right|+C.$

1.22. $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx.$ **Жауабы:** $-\sqrt{9-x^2}+4\arcsin\frac{x}{3}+C.$

1.23. $\int \frac{2x-7}{x^2-5}dx.$ **Жауабы:** $\ln\left|x^2-5\right|-\frac{7}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C.$

1.24. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}}dx.$ **Жауабы:** $7\sqrt{x^2-1}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$

1.25. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ **Жауабы:** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+3\sqrt{x^2+1}+C.$

1.26. $\int \frac{x-5}{x^2+7}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+7\right|-\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C.$

1.27. $\int \frac{3-7x}{1+x^2}dx.$ **Жауабы:** $3\operatorname{arctg}x-\frac{7}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C.$

1.28. $\int \frac{8-2x}{1+3x^2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}x-\frac{1}{3}\ln\left|1+3x^2\right|+C.$

1.29. $\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2+4}}dx.$ **Жауабы:** $3\sqrt{x^2+4}+7\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$

1.30. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-4}-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-4}\right|+C.$

2.

2.1. $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{6}\ln\left|1+3\cos 2x\right|+C.$

2.2. $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{3}{4}\ln\left|1-x^4\right|+C.$

2.3. $\int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{3}\ln\left|3-\cos 3x\right|+C.$

2.4. $\int \frac{e^x}{2e^x+3}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|2e^x+3\right|+C.$

2.5. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x-4}dx.$ **Жауабы:** $-\ln\left|\cos^2 x-4\right|+C.$

2.6. $\int \frac{e^x}{4-3e^x}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{3}\ln\left|4-3e^x\right|+C.$

2.7. $\int \frac{x^2}{7-5x^3}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{15}\ln\left|7-5x^3\right|+C.$

2.8. $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{3}\ln\left|3\sin^2 x+4\right|+C.$

2.9. $\int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|5+e^{2x}\right|+C.$

2.10. $\int \frac{4x^3}{7+2x^4}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|7+2x^4\right|+C.$

2.11. $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+17}dx.$ **Жауабы:** $\ln\left|2x^2-5x+17\right|+C.$

2.12. $\int \frac{7x^3}{2x^4-5}dx.$ **Жауабы:** $\frac{7}{8}\ln\left|2x^4-5\right|+C.$

2.13. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x-2}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{3}\sqrt{\sin 3x-2}+C.$

2.14. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx.$ **Жауабы:** $-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C.$

2.15. $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C.$

2.16. $\int \frac{\sin 2x}{4-\sin^2 x}dx.$ **Жауабы:** $-\ln\left|4-\sin^2 x\right|+C.$

2.17. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{3}\ln\left|e^{3x}-5\right|+C.$

2.18. $\int \frac{x^2}{7+3x^3}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{9}\ln\left|7+3x^3\right|+C.$

2.19. $\int \frac{3x+3}{x^2+2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2\right|+C.$

2.20. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{e^{2x}+3}+C.$

2.21. $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x-10}dx.$ **Жауабы:** $\ln\left|x^3+x-10\right|+C.$

2.23. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^5+3}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{5}\sqrt{x^5+3}+C.$

2.24. $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x}}dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{2x^3-4x}+C.$

2.25. $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt{5-\sin 7x}}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{2}{7}\sqrt{5-\sin 7x}+C.$

2.26. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x+3}}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 4x+3}+C.$

2.27. $\int \frac{12x^2+5x^4}{4x^3+x^5}dx.$ **Жауабы:** $\ln\left|4x^3+x^5\right|+C.$

2.28. $\int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx.$ **Жауабы:** $-4\sqrt{1-e^{2x}}+C.$

2.29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{6-\cos^2 x}}dx.$ **Жауабы:** $2\sqrt{6-\cos^2 x}+C.$

2.30. $\int \frac{7x}{\sqrt{5x^2-4}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{7}{5}\sqrt{5x^2-4}+C.$

3.

3.1. $\int \frac{1-2x-x^3}{1+x^2}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\operatorname{arctg} x+C.$

3.2. $\int \frac{7-x^2}{1-x}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}+x-6\ln|1-x|+C.$

3.3. $\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

3.4. $\int \frac{8x^3-1}{2x+1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{4}{3}x^3-x^2+x-\ln|2x+1|+C.$

3.5. $\int \frac{x^5-2}{x^2-4}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{4}x^4+2x^2+8\ln\left|x^2-4\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

3.6. $\int \frac{2x^4-3}{x^2+1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{3}x^3-2x-\operatorname{arctg} x+C.$

3.7. $\int \frac{x^3-1}{2x+1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{8}x-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$

3.8. $\int \frac{x^5}{1-x^3}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\ln\left|1-x^3\right|+C.$

3.9. $\int \frac{x^2}{x^2+3}dx.$ **Жауабы:** $x-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

3.10. $\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx.$ **Жауабы:** $x^3+x^2+\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C.$

3.11. $\int \frac{x^4}{x^2-3}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^3}{3}+3x+\frac{9}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$

3.12. $\int \frac{x^3+5x}{x^2+1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}+2\ln|x^2+1|+C.$

3.13. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx.$ **Жауабы:** $x-\frac{5}{2}\ln|x^2+4|+\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C.$

3.14. $\int \frac{x^3-1}{x+3}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-28\ln|x+3|+C.$

3.15. $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C.$

3.16. $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{3}x^3-x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C.$

3.17. $\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^3}{3}-3x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C.$

3.18. $\int \frac{x^4+2}{x^2-4}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^3}{3}+4x+\frac{9}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

3.19. $\int \frac{x^3-3}{x+5}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+25x-128\ln|x+5|+C.$

3.20. $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\mathrm{arctg}\,x+C.$

3.21. $\int \frac{1-2x^4}{x^2+1}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{2}{3}x^3+2x-\mathrm{arctg}\,x+C.$

3.22. $\int \frac{2x^3-3}{x-2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{3}x^3+2x^2+8x+13\ln|x-2|+C.$

3.23. $\int \frac{2x^2+5}{x+1}dx.$ **Жауабы:** $2x+3\operatorname{arctg}x+C.$

3.24. $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

3.25. $\int \frac{x^2+x}{2-x}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{x^2}{2}-3x-6\ln|x-2|+C.$

3.26. $\int \frac{2x^2+5}{x-7}dx.$ **Жауабы:** $x^2+14x+103\ln|x-7|+C.$

3.27. $\int \frac{2x^3+3}{x-1}dx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{3}x^3+x^2+2x+5\ln|x-1|+C.$

3.28. $\int \frac{1-x^4}{x^2+4}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{x^3}{3}+4x-\frac{15}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

3.29. $\int \frac{x^2+4}{x-3}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}+3x+13\ln|x-3|+C.$

3.30. $\int \frac{2x^2+3}{2x^2-1}dx.$ **Жауабы:** $x+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C.$

4.

4.1. $\int \sin^2(1-x)dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2(1-x)+C.$

4.2. $\int \sin^3(1-x)dx.$ **Жауабы:** $\cos(1-x)-\frac{1}{3}\cos^3(1-x)+C.$

4.3. $\int \left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)^2dx.$ **Жауабы:** $3x+20\cos\frac{x}{5}-5\sin\frac{2x}{5}+C.$

4.4. $\int \cos 5x\sin^3 5x\,dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{20}\cos^4 5x+C.$

4.5. $\int \cos^3(1-x)dx.$ **Жауабы:** $-\sin(1-x)+\frac{1}{3}\sin^3(1-x)+C.$

4.6. $\int\left(3-\sin 2x\right)^2dx.$ **Жауабы:** $\frac{19}{2}x+3\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$

4.7. $\int\sin^2\frac{3x}{2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\sin 3x+C.$

4.8. $\int(\quad\cos x+3\quad)^2dx.$ **Жауабы:** $\frac{19}{2}x+6\sin x+C.$

4.9. $\int\cos^3\left(x+3\right)dx.$ **Жауабы:** $\sin\left(x+3\right)-\frac{1}{3}\sin^3\left(x+3\right)+C.$

4.10. $\int\sin^3\frac{4x}{5}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{5}{4}\cos\frac{4x}{5}+\frac{5}{12}\cos^3\frac{4x}{5}+C.$

4.11. $\int\left(1-\cos x\right)^2dx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{2}x-2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

4.12. $\int\sin^2\left(2x-1\right)dx.$ **Жауабы:** $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin\left(4x-2\right)+C.$

4.13. $\int\sin^3 6xdx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{18}\cos^3 6x+C.$

4.14. $\int\sin^2\left(0{,}5x\right)dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C.$

4.15. $\int\sin^2\left(\frac{x}{2}+1\right)dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin\left(x+2\right)+C.$

4.16. $\int\cos^2 2x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C.$

4.17. $\int\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx.$ **Жауабы:** $3x+8\sin\frac{x}{2}+2\sin x+C.$

4.18. $\int\cos^2 3x\,dx.$ **Жауабы: (** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+C.$

4.19. $\int\sin^4 2x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C.$

4.20. $\int\sin^2 3x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C.$

4.21. $\int\left(1-\cos 3x\right)^2 dx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{12}\sin 6x+C.$

4.22. $\int\cos^2\frac{2x}{5}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}\sin\frac{4x}{5}+C.$

4.23. $\int\sin^3 5xdx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{15}\cos^3 5x+C.$

4.24. $\int\sin^4 xdx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

4.25. $\int\cos^4 x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

4.26. $\int\cos^3 4x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin^3 4x+C.$

4.27. $\int\cos^2 7x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{28}\sin 14x+C.$

4.28. $\int\left(\sin x-5\right)^2 dx.$ **Жауабы:** $\frac{51}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+10\cos x+C.$

4.29. $\int\sin^3 4x\,dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{12}\cos^3 4x+C.$

4.30. $\int\sin^2\frac{3x}{4}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}+C.$

5.

5.1. $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx.$ **Жауабы:** $\operatorname{tg}x-x+C.$

5.2. $\int\operatorname{ctg}^3\left(x-6\right)dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\left(x-6\right)-\ln\left|\sin\left(x-6\right)\right|+C.$

5.3. $\int\operatorname{tg}^4 3x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{9}\operatorname{tg}^3 3x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x+x+C.$

5.4. $\int\operatorname{tg}^2 7x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{7}\operatorname{tg}7x-x+C.$

5.5. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C.$

5.6. $\int x\operatorname{tg}^2 x^2\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x^2-\frac{1}{2}x^2+C.$

5.7. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C.$

5.8. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\,dx.$ **Жауабы:** $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C.$

5.9. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}\,dx.$ **Жауабы:** $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.$

5.10. $\int \operatorname{tg}^2 4x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}4x-x+C.$

5.11. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C.$

5.12. $\int \operatorname{ctg}^2 5x\,dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}5x-x+C.$

5.13. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}+3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+C.$

5.14. $\int (1-\operatorname{tg}2x)^2\,dx.$ **Жауабы:** $\ln|\cos 2x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x+C.$

5.15. $\int \operatorname{tg}^5 2x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^4 2x-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C.$

5.16. $\int \left(2x+\operatorname{tg}^2 7x\right)dx.$ **Жауабы:** $x^2+\frac{1}{7}\operatorname{tg}7x-x+C.$

5.17. $\int \operatorname{tg}^4 \frac{2x}{3}\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}-\frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{2x}{3}+x+C.$

5.18. $\int (\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x)^2\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2x+C.$

5.19. $\int (1-\operatorname{ctg}x)^2\,dx.$ **Жауабы:** $-2\ln|\sin x|-\operatorname{ctg}x+C.$

5.20. $\int \operatorname{ctg}^3 3x\,dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln\left|\sin 3x\right|+C.$

5.21. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg}x+x+C.$

5.22. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}dx.$ **Жауабы:** $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C.$

5.23. $\int \operatorname{tg}^4 (x-6)dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(x-6)-\operatorname{tg}(x-6)+x+C.$

5.24. $\int \operatorname{tg}^3 4x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 4x+\frac{1}{4}\ln\left|\cos 4x\right|+C.$

5.25 $\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4}dx.$ **Жауабы:** $\frac{4}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{4}-4\operatorname{tg}\frac{x}{4}+x+C.$

5.26. $\int \operatorname{tg}^4 (x+5)dx.$ **Жауабы:** $\frac{\operatorname{tg}^3(x+5)}{3}-\operatorname{tg}(x+5)+x+C.$

5.27. $\int \operatorname{tg}^3 (x-3)dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x-3)+\ln\left|\cos(x-3)\right|+C.$

5.28. $\int \operatorname{tg}^2 (5x+1)dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x+1)-x+C.$

5.29. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{7x}{4}dx.$ **Жауабы:** $\frac{4}{7}\operatorname{tg}\frac{7x}{4}-x+C.$

5.30. $\int \operatorname{tg}^5 4x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{16}\operatorname{tg}^4 4x-\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 4x-\frac{1}{4}\ln\left|\cos 4x\right|+C.$

6.

6.1. $\int \sin 3x\cos x\,dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

6.2. $\int \sin^5 2x\cos 2x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{12}\sin^6 2x+C.$

6.3. $\int \sin^2 3x\cos 3x\,dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{9}\sin^3 3x+C.$

6.4. $\int \cos^3 5x \sin 5x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{20}\cos^4 5x + C.$

6.5. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} dx.$ **Жауабы:** $-\frac{2}{3}\cos\frac{3x}{4} - 2\cos\frac{x}{4} + C.$

6.6. $\int \cos x \sin 9x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$

6.7. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{10}\sin^5 2x + C.$

6.8. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos x + C.$

6.9. $\int \cos^5 x \sin x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{6}\cos^6 x + C.$

6.10. $\int \cos 2x \sin 3x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C.$

6.11. $\int \sin 5x \sin 7x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$

6.12. $\int \sin 4x \cos 2x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

6.13. $\int \cos^3 4x \sin 4x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{16}\cos^4 4x + C.$

6.14. $\int \cos^{-3} 2x \sin 2x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{4}\cos^{-2} 2x + C.$

6.15. $\int \cos x \sin 9x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$

6.16. $\int \sin 4x \cos 2x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

6.17. $\int \sin 3x \cos 2x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C.$

6.18. $\int \sin^3 7x \cos 7x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{28}\sin^4 7x + C.$

6.19. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\cos^{-2} x + C.$

6.20. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 2x}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{6\sin^3 2x} + C.$

6.21. $\int \cos 2x \cos 5x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{14}\sin 7x + C.$ **)**

6.22. $\int \sin^2 2x \cos x dx.$ **Жауабы:** $\frac{4}{3}\sin^3 x - \frac{4}{5}\sin^5 x + C.$

6.23. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{3\sin^3 x} + C.$

6.24. $\int \sin 2x \sin 3x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C.$

6.25. $\int \sin x \cos^3 x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{\cos^4 x}{4} + C.$

6.26. $\int \sin 5x \cos x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.$

6.27. $\int \sin x \cos 4x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

6.28. $\int \cos 3x \cos x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

6.29. $\int \cos^4 2x \sin 2x dx.$ **Жауабы:** $-\frac{1}{10}\cos^5 2x + C.$

6.30. $\int \cos 7x \cos 5x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$

7.

7.1. $\int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}.$ **Жауабы:** $\frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{8x-5}{\sqrt{39}} + C.$

7.2. $\int\frac{dx}{x^2+4x+10}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$

7.3. $\int\frac{dx}{2x^2-7x+1}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x-7-\sqrt{41}}{4x-7+\sqrt{41}}\right|+C.$

7.4. $\int\frac{dx}{2x^2+x-6}$. **Жауабы:** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+4}\right|+C.$

7.5. $\int\frac{dx}{5x^2+2x+7}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{34}}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{\sqrt{34}}+C.$

7.6. $\int\frac{dx}{2x^2-2x+1}$. **Жауабы:** $\operatorname{arctg}(2x-1)+C.$

7.7. $\int\frac{dx}{2x^2-11x+2}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{105}}\ln\left|\frac{4x-11-\sqrt{105}}{4x-11+\sqrt{105}}\right|+C.$

7.8. $\int\frac{dx}{2x^2+x+2}$. **Жауабы:** $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{15}}+C.$

7.9. $\int\frac{dx}{3x^2-12x+3}$. **Жауабы:** $\frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C.$

7.10. $\int\frac{dx}{2x^2+3x}$. **Жауабы:** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+\frac{3}{2}}\right|+C.$

7.11. $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$. **Жауабы:** $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$

7.12. $\int\frac{dx}{2x-3-4x^2}$. **Жауабы:** $-\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{11}}+C.$

7.13. $\int\frac{dx}{3x^2-8x-3}$. **Жауабы:** $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{3x-9}{3x+1}\right|+C.$

7.14. $\int\frac{dx}{8-2x-x^2}$. **Жауабы:** $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right|+C.$

7.15. $\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$. **Жауабы:** $-\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$

7.16. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{21}}+C.$

7.17. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$. **Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{11}}+C.$

7.18. $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$. **Жауабы:** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$

7.19. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$. **Жауабы:** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{3}+C.$

7.20. $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$. **Жауабы:** $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{2x-4}{2x+1}+C.$

7.21. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$. **Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x-3-\sqrt{7}}{2x-3+\sqrt{7}}\right|+C.$

7.22. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$. **Жауабы:** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{7}}+C.$

7.23. $\int \frac{dx}{x^2+7x+11}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+7-\sqrt{5}}{2x+7+\sqrt{5}}\right|+C.$

7.24. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$. **Жауабы:** $\ln\left|\frac{2x-2}{2x-1}\right|+C.$

7.25. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$. **Жауабы:** $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$

7.26. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}$. **Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{3}}{2x+3+\sqrt{3}}\right|+C.$

7.27. $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$. **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|+C.$

7.28. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$. **Жауабы:** $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+3}\right|+C.$

7.29. $\int \frac{dx}{2x^2+3x+6}$. **Жауабы:** $\frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{39}}+C.$

7.30. $\int \frac{dx}{3x^2+5x+1}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{6x+5-\sqrt{13}}{6x+5+\sqrt{13}}\right|+C.$

8.

8.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$. **Жауабы:** $\arcsin\frac{x-4}{\sqrt{20}}+C.$

8.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{2}{3}+\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+C.$

8.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{5}+C.$

8.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$. **Жауабы:** $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+8}\right|+C.$

8.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}}+C.$

8.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C.$

8.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{7}}+C.$

8.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$. **Жауабы:** $\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$

8.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{4}{5}}\right|+C.$

8.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$. **Жауабы:** $\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$

8.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{3}{4}}\right|+C.$

8.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. **Жауабы:** $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$

8.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{1}{8}+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}x+1}\right|+C.$

8.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{10}}+C.$

8.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+1}\right|+C.$

8.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2-2x^2}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$

8.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+1}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+\frac{1}{2}}\right|+C.$

8.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$. **Жауабы:** $\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+6}\right|+C.$

8.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{3}+C.$

8.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}\right|+C.$

8.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+1}{\sqrt{17}}+C.$

8.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$. **Жауабы:** $\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-1}\right|+C.$

8.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C.$

8.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{6}+\sqrt{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}\right|+C.$

8.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$. **Жауабы:** $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$

8.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **Жауабы:** $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

8.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$. **Жауабы:** $\arcsin\frac{2x+3}{5}+C.$

8.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$. **Жауабы:** $\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+1}\right|+C.$

8.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$. **Жауабы:** $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{13}}+C.$

8.30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$. **Жауабы:** $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+C.$

9.

9.1. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+3x-4\right|+\frac{1}{4\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x+3-\sqrt{41}}{4x+3+\sqrt{41}}\right|+C.$**)**

9.2. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+x+1\right|+\frac{35}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x+1}{\sqrt{11}}+C.$

9.3. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2x+6\right|-\frac{1}{3\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{17}}+C.$

9.4. $\int \frac{x}{2x^2+x+5}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+x+5\right|-\frac{1}{2\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{39}}+C.$

9.5. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-2\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$

9.6. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx.$

Жауабы: $\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C.$

9.7. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-6x-8\right|+\frac{11}{20}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right|+C.$

9.8. $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-7x+1\right|+\frac{23}{4\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x-7-\sqrt{41}}{4x-7+\sqrt{41}}\right|+C.$

9.9. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx.$

Жауабы: $\frac{5}{4}\ln\left|2x^2-5x+2\right|+\frac{17}{12}\ln\left|\frac{2x-4}{2x-1}\right|+C.$

9.10. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|4x^2-4x+5\right|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{2}+C.$

9.11. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+x+1\right|+\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}+C.$

9.12. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-2x-3\right|+\frac{2}{3\sqrt{10}}\ln\left|\frac{3x-1-\sqrt{10}}{3x-1+\sqrt{10}}\right|+C.$

9.13. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|4x^2+6x-13\right|+\frac{5}{2\sqrt{61}}\ln\left|\frac{4x+3-\sqrt{61}}{4x+3+\sqrt{61}}\right|+C.$

9.14. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx.$

Жауабы: $\frac{5}{2}\ln\left|x^2-4x+1\right|+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C.$

9.15. $\int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+2x+5\right|-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C.$

9.16. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+4\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C.$

9.17. $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|2x^2+8x-6\right| - \frac{5}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right| + C.$

9.18. $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx.$

Жауабы: $-\frac{1}{8}\ln\left|4x^2+16x-12\right| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right| + C.$

9.19. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-9}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-6x-9\right| + \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C.$

9.20. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx.$

Жауабы: $-\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-x-3\right| + \frac{1}{10}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+2}\right| + C.$

9.21. $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+x-1\right| - \frac{25}{6\sqrt{13}}\ln\left|\frac{6x+1-\sqrt{13}}{6x+1+\sqrt{13}}\right| + C.$

9.22. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx.$

Жауабы: $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x-2\right| + \frac{7}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{6}}{x-2+\sqrt{6}}\right| + C.$

9.23. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+x-4\right|+\frac{21}{4\sqrt{33}}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{33}}{4x+1+\sqrt{33}}\right|+C.$

9.24. $\int\frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2+2x-7\right|+\frac{7}{6\sqrt{22}}\ln\left|\frac{3x+1-\sqrt{22}}{3x+1+\sqrt{22}}\right|+C.$

9.25. $\int\frac{x-3}{4x^2+2x-3}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{8}\ln\left|4x^2+2x-3\right|-\frac{\sqrt{13}}{8}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{13}}{4x+1+\sqrt{13}}\right|+C.$

9.26. $\int\frac{x+2}{3x^2-x+5}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-x+5\right|+\frac{13}{3\sqrt{59}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{59}}+C.$

9.27. $\int\frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx.$

Жауабы: $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x-1\right|-\frac{19}{2\sqrt{29}}\ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{29}}{2x+5+\sqrt{29}}\right|+C.$

9.28. $\int\frac{x-7}{4x^2+3x-1}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{8}\ln\left|4x^2+3x-1\right|-\frac{59}{40}\ln\left|\frac{8x-2}{8x+8}\right|+C.$

9.29. $\int\frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{5}\ln\left|5x^2+2x-10\right|+\frac{3}{5\sqrt{49}}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{\sqrt{49}}+C.$

9.30. $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{10}\ln\left|5x^2-x+7\right|-\frac{39}{5\sqrt{139}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{139}}+C.$

10.

10.1. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx.$

Жауабы: $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-3x-16}-4\sqrt{3}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-\frac{16}{3}}\right|+C.$

10.2. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-4x-1}-\sqrt{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-\frac{1}{2}}\right|+C.$

10.3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-x+5}-\frac{5}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{6}+\sqrt{x^2-\frac{x}{3}+\frac{5}{3}}\right|+C.$

10.4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx.$

Жауабы: $-\frac{2}{3}\sqrt{1+x-3x^2}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-1}{\sqrt{3}}+C.$

10.5. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{9}{4}}\right|+C.$

10.6. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

Жауабы: $-2\sqrt{1+x-x^2}-9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$

10.7. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$

Жауабы: $2\sqrt{1-x-x^2}-7\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C.$

10.8. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx.$

Жауабы: $3\sqrt{x^2+6x+13}-5\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+C.$

10.9. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx.$

Жауабы: $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-5x+1}+\frac{11}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}}\right|+C.$

10.10. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx.$

Жауабы: $5\sqrt{x^2+3x-4}-\frac{11}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-4}\right|+C.$

10.11. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-x+7}-\frac{15}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{7}{2}}\right|+C.$

10.12. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx.$

Жауабы: $2\sqrt{x^2-3x+4}+2\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+4}\right|+C.$

10.13. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx.$

Жауабы: $-4\sqrt{2+x-x^2}+3\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.$

10.14. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx.$

Жауабы: $\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+4x-5}-4\sqrt{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-\frac{5}{2}}\right|+C.$

10.15. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx.$

Жауабы: $-3\sqrt{4+2x-x^2}+5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C.$

10.16. $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-2x+1}-\frac{20}{3\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+C.$

10.17. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx.$

Жауабы: $-\sqrt{3-6x-x^2}+2\arcsin\frac{x+3}{\sqrt{12}}+C.$

10.18. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}dx.$

Жауабы: $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+x-5}+\frac{11}{3\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{6}+\sqrt{x^2+\frac{x}{3}-\frac{5}{3}}\right|+C.$

10.19. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx.$

Жауабы: $7\sqrt{x^2-5x+1}+\frac{31}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+1}\right|+C.$

10.20. $\int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}}dx.$

Жауабы: $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+x-5}-\frac{65}{16}\ln\left|x+\frac{1}{8}+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}}\right|+C.$

10.21. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}}dx.$

Жауабы: $-3\sqrt{2+3x-x^2}+\frac{17}{2}\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{17}}+C.$

10.22. $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

Жауабы: $-\sqrt{3-2x-x^2}-7\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$

10.23. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx.$

Жауабы: $\sqrt{2x^2-x+6}+\frac{7}{2\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+3}\right|+C.$

10.24. $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx.$

Жауабы: $-\sqrt{4+2x-x^2}-8\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C.$

10.25. $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx.$

Жауабы: $2\sqrt{x^2+5x-4}+2\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-4}\right|+C.$

10.26. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}dx.$

Жауабы: $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-6x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+\frac{1}{2}}\right|+C.$

10.27. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}dx.$

Жауабы: $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-4}+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-\frac{4}{3}}\right|+C.$

10.28. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}}dx.$

Жауабы: $2\sqrt{2x^2-x+5}+2\sqrt{2}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}}\right|+C.$

10.29. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx.$

Жауабы: $3\sqrt{x^2-5x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+1}\right|+C.$

10.30. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx.$

Жауабы: $-7\sqrt{2-3x-x^2}-\frac{23}{2}\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C.$

7.2-ҮТ шығару үлгісі

Анықталмаған интегралды есептеу керек (§ 7.2)

1. $\int \frac{3-7x}{4x^2+5}dx.$

►

$$\int \frac{3-7x}{4x^2+5}dx = 3\int \frac{dx}{(2x)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} - 7\int \frac{xdx}{4x^2+5} = \frac{3}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} -$$

$$-\frac{7}{8}\int \frac{8xdx}{4x^2+5} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{7}{8}\ln\left(4x^2+5\right)+C. \quad ◄$$

$$\textbf{2.}\quad \int \frac{dx}{e^{3x}\left(2-e^{-3x}\right)}.$$

► Айнымалды ауыстырамыз: $u = 2 - e^{-3x}$. Онда $du = 3\,e^{-3x}dx$ және

$$\int \frac{dx}{e^{3x}\left(2-e^{-3x}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{-3x}dx}{2-e^{-3x}} = \frac{1}{2}\ln\left|2-e^{-3x}\right| + C. \quad ◄$$

$$\textbf{3.}\quad \int \frac{3x^5-4x}{x^2+1}\,dx.$$

► Интеграл астында бұрыс бөлшек тұр. Алымын бөліміне бөліп, оны бүтін бөлік пен дұрыс бөлшек қосындысына келтіріп алып интегралдаймыз (7.2.3 п. қараңыз):

$$\int \frac{3x^5-4x}{x^2+1}\,dx = \int\left(3x^3-3x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{3}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.$$

◄

Назарыңызға: 7.2.3 п. 1 және 2 мысалдарды қараңыз.

$$\textbf{4.}\quad \int \cos^3(7x+2)\,dx.$$

► Бұл $\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$ түріндегі интегралдың $m=0,\quad n=3$ жағдайы (§ 7.3., (6)-формула, а) мысалды қараңыз). Тригонометриялық тепе-теңдікті: $\cos^2(7x+2) = 1-\sin^2(7x+2)$ пайдаланып, табамыз:

$$\int \cos^3(7x+2)\,dx = \int \cos^2(7x+2)\cos(7x+2)\,dx =$$
$$= \int\left(1-\sin^2(7x+2)\right)\cos(7x+2)\,dx =$$

$$=\int\cos(7x+2)dx-\int\sin^2(7x+2)\cos(7x+2)\,dx=\frac{1}{7}\sin(7x+2)-$$

$$-\frac{1}{7}\int\sin^2(7x+2)d\left(\sin(7x+2)\right)=$$

$$=\frac{1}{7}(7x+2)-\frac{1}{21}\sin^3(7x+2)+C. \quad ◄$$

5. $\int ctg^4 5xdx.$

► $\operatorname{ctg}^2 5x=\frac{1}{\sin^2 5x}-1$ теңдігін пайдаланамыз:

$$\int\operatorname{ctg}^4 5xdx=\int\operatorname{ctg}^2 5x\left(\frac{1}{\sin^2 5x}-1\right)dx=\int\operatorname{ctg}^2 5x\frac{1}{\sin^2 5x}dx-\int\operatorname{ctg}^2 5xdx=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\operatorname{ctg}^2 5x\left(-\frac{5}{\sin^2 5x}\right)dx-\int\left(\frac{1}{\sin^2 5x}-1\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{15}\operatorname{ctg}^3 5x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}5x+x+C\ . \quad ◄$$

6. $\int\sin\frac{7}{2}x\sin\frac{3}{2}xdx.$

►

$$\int\sin\frac{7}{2}x\sin\frac{3}{2}xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 5x)\,dx=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{10}\sin 5x+C.$$

◄

Назарыңызға: § 7.3 п. соңғы мысалды қараңыз.

7. $\int\frac{dx}{6x^2-3x+2}.$

► Бұл 7.2.1 п. (*) түріндегі интеграл. Ондағы мысалда көрсетілген әдісті қолданамыз:

$$\int \frac{dx}{6x^2-3x+2} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{16}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{4\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{13}}{4\sqrt{3}}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{(4x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + C. \qquad ◄$$

8. $\displaystyle\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}\,dx.$

► Мұнда 7.2.1 п. б) көрсетілген әдісті қолданамыз:

$$\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{-2x+4-5+5}{2-5x-x^2}dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x-5}{2-5x-x^2}dx - \frac{3}{2}\cdot 9\int \frac{dx}{2-5x-x^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln\left|2-5x+x^2\right| + \frac{27}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-2-\frac{25}{4}} = -\frac{3}{2}\ln\left|2-5x+x^2\right| +$$

$$+\frac{27}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln\left|2-5x+x^2\right| + \frac{27}{2\sqrt{33}}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}}{x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln\left|2-5x+x^2\right| + \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{2x-5-\sqrt{33}}{2x-5+\sqrt{33}}\right| + C. \quad ◄$$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}}.$

► Бұған 7.2.1 п. (*) көрсетілген интегралдау әдісін қолда-намыз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{2}{5}x-\frac{7}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{7}{5}-\frac{1}{25}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\frac{1}{5}+\sqrt{x^2+\frac{2}{5}x-\frac{7}{5}}\right| + C. \quad ◄$$

10. $\displaystyle\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx.$

► Мұнда 7.2.1 п. Ескертуде көрсетілген әдіс қолданылады:

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-6x+21-4+4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{-6x-4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx - \frac{25}{3\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}} =$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2}-\frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}}+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2}-\frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+2}{\sqrt{7}}+C. \qquad ◄$$

7.3-ҮТ
Анықталмаған интегралдарды табыңыз

1.

1.1. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|+\sqrt{1-x^2}+C.$

1.2. $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{x^2-1}\arccos\frac{1}{x}+C.$

1.3. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{4+x^2}+\ln\left|\frac{2-\sqrt{4+x^2}}{2+\sqrt{4+x^2}}\right|+C.$

1.4. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx.$ **Жауабы:** $C-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^3}.$

1.5. $\int\sqrt{4-x^2}dx.$ **Жауабы:** $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$

1.6. $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{x^2+9}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{3+\sqrt{x^2+9}}\right|+C.$

1.7. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx.$ **Жауабы:** $\ln\left|\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{x-\sqrt{4+x^2}}\right|-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.$

1.8. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx.$ **Жауабы:** $C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^3}.$

1.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$ **Жауабы:** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

1.10. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx.$ **Жауабы:** $C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{x^3}.$

1.11. $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)3}}{x^6}dx.$ **Жауабы:** $C-\frac{1}{20}\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}{x^5}.$

1.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}.$ **Жауабы:** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}+C.$

1.13. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C.$

1.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}.$ **Жауабы:** $C-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$

1.15. $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{5}\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}-3\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}+C.$

1.16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}.$ **Жауабы:** $C-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$

1.17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$ **Жауабы:** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$

1.18. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-9}+x}{\sqrt{x^2-9}-x}\right|-\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C.$

1.19. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+C.$

1.20. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx.$ **Жауабы:** $C-\frac{1}{27}\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^3}.$

1.21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}.$ **Жауабы:** $C-\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x}.$

1.22. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{8}\arcsin x-\frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}\left(1-2x^2\right)+C.$

1.23. $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{5}\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}-\frac{1}{3}x\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C.$

1.24. $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^4}dx.$ **Жауабы:** $\arcsin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^3}+C.$

1.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}.$ **Жауабы:** $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C.$

1.26. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx.$ **Жауабы:** $C-\frac{1}{27}\frac{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}{x^3}.$

1.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}.$ **Жауабы:** $\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+C.$

1.28. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}.$ **Жауабы:** $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C.$

1.29. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx.$ **Жауабы:** $C-\frac{1}{48}\frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}.$

1.30. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx.$ **Жауабы:** $C-\arcsin\frac{x}{4}-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}.$

2.

2.1. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}.$ **Жауабы:** $C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}(x+1)}\right|.$

2.2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$ **Жауабы:** $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C.$

2.3. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}.$ **Жауабы:** $C-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$

2.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$ **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|.$

2.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$ **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|.$

2.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ **Жауабы:** $C-\arcsin\frac{1}{x}.$

2.7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$ **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|.$

2.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}.$ **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2-x+1}}{x}-\frac{1}{2}\right|.$

2.9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}.$ **Жауабы:** $C-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{5}x}.$

2.10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$. **Жауабы:** $C-\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}x}$.

2.11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$. **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$.

2.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$. **Жауабы:** $C-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4-x}{3x}$.

2.13. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$. **Жауабы:** $C-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3}(x+1)}\right|$.

2.14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$. **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$.

2.15. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$.

2.16. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$. **Жауабы:** $C-\arcsin\frac{x+3}{\sqrt{5}(x+1)}$.

2.17. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$. **Жауабы:** $\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{5}(x+1)}+C$.

2.18. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$. **Жауабы:** $C-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}(x-1)}\right|$.

2.19. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$. **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}\right|$.

2.20. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}}$. **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x-1}\right|$.

2.21. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$. **Жауабы:** $C-\arcsin\frac{3-x}{\sqrt{5}(x-1)}$.

2.22. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$. **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+x-x^2}}{x-1}\right|$.

2.23. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$. **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x+1}\right|$.

2.24. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$. **Жауабы:** $C-\arcsin\frac{3x-1}{\sqrt{5}(x-1)}$.

2.25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$. **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x}\right|$.

2.26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$. **Жауабы:** $C-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6-x}{x\sqrt{3}}$.

2.27. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$. **Жауабы:** $C-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+5}{3(x+1)}$.

2.28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$. **Жауабы:** $C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x}\right|$.

2.29. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$. **Жауабы:** $C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x+1}\right|$.

2.30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$. **Жауабы:** $C-\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{1-3x-2x^2}}{x}\right|$.

3.

3.1. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx.$ **Жауабы:** $\operatorname{tg} x\ln(\cos x)+\operatorname{tg} x-x+C.$

3.2. $\int \cos(\ln x)dx.$ **Жауабы:** $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right)+C.$

3.3. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$ **Жауабы:** $C-\frac{\ln x+1}{x}.$

3.4. $\int \ln(x+2)dx.$ **Жауабы:** $x\ln(x+2)-x+2\ln(x+2)+C.$

3.5. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}dx.$ **Жауабы:** $C-\operatorname{ctg}x\ln(\cos x)-x.$

3.6. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx.$ **Жауабы:** $\ln x\ln(\ln x)-\ln x+C.$

3.7. $\int \ln^2 xdx.$ **Жауабы:** $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$

3.8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$ **Жауабы:** $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C.$

3.9. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}-x-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}+C.$

3.10. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$ **Жауабы:** $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C.$

3.11. $\int \ln(x+4)dx.$ **Жауабы:** $x\ln(x+4)-x+4\ln(x+4)+C.$

3.12. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x+C.$

3.13. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx.$ **Жауабы:** $C-x-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}x\ln(\sin x).$

3.14. $\int x^2\ln(x+1)dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^3}{3}\ln(x+1)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(x+1)+C.$

3.15. $\int \frac{\ln x\ln(\ln x)}{x}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln^2 x\ln(\ln x)-\frac{1}{4}\ln^2 x+C.$

3.16. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx.$ **Жауабы:** $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C.$

3.17. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx.$ **Жауабы:** $C-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}.$

3.18. $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x-\frac{8}{9}\sqrt{x^3}\ln x+\frac{16}{27}\sqrt{x^3}+C.$

3.19. $\int \ln\frac{1-x}{1+x}dx.$ **Жауабы:** $x\ln\frac{1-x}{1+x}-\ln\left(x^2-1\right)+C.$

3.20. $\int \left(x^2-x+1\right)\ln xdx.$

Жауабы: $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C.$

3.21. $\int \sqrt{x}\ln xdx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}+C.$

3.22. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx.$ **Жауабы:** $\mathrm{tg}\,x\ln(\sin x)-x+C.$

3.23. $\int x\ln\left(x^2+1\right)dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.$

3.24. $\int x\ln^2 xdx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C.$

3.25. $\int x^2\ln xdx.$ **Жауабы:** $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$

3.26. $\int x\ln(x+1)dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(x+1)+C.$

3.27. $\int \sin(\ln x)dx.$ **Жауабы:** $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C.$

3.28. $\int \left(x^2-4\right)\sin 5xdx.$ **Жауабы:** $\frac{2}{25}x\sin 5x-\frac{x^2-21}{5}\cos 5x+C.$

3.29. $\int \ln(x+5)dx.$ **Жауабы:** $x\ln(x+5)-x+5\ln(x+5)+C.$

3.30. $\int \ln\frac{2-x}{2+x}dx.$ **Жауабы:** $x\ln\frac{2-x}{2+x}-2\ln\left|4-x^2\right|+C.$

4.

4.1. $\int\sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x}dx.$

Жауабы: $\frac{2}{9}\sqrt{x^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\arccos\sqrt{x}+C.$

4.2. $\int\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}dx.$

Жауабы: $\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{9}\sqrt{x^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\arcsin\sqrt{x}+C.$

4.3. $\int x\,\mathrm{arctg}\,2xdx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\,2x+C.$

4.4. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx.$ **Жауабы:** $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C.$

4.5. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx.$ **Жауабы:** $4\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}\arcsin x+C.$

4.6. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$ **Жауабы:** $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C.$

4.7. $\int\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C.$

4.8. $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ **Жауабы:** $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C.$

4.9. $\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+C.$

4.10. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,xdx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}\mathrm{arcctg}\,x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\,x+C.$

4.11. $\int \frac{x \arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$ **Жауабы:** $C - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} \arccos 2x.$

4.12. $\int \arccos 2x dx.$ **Жауабы:** $\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.$

4.13. $\int \operatorname{arctg} x dx.$ **Жауабы:** $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$

4.14. $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$ **Жауабы:** $C - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} \arccos \sqrt{x}.$

4.15. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ **Жауабы:** $C - x - \sqrt{1-x^2} \arccos x.$

4.16. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx.$ **Жауабы:** $C - 4\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} \arccos x.$

4.17. $\int \operatorname{arcctg} 2x dx.$ **Жауабы:** $x \operatorname{arcctg} 2x + \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) + C.$

4.18. $\int \frac{x \operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$ **Жауабы:** $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arcctg} x + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C.$

4.19. $\int \arcsin 2x dx.$ **Жауабы:** $x \arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.$

4.20. $\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x + C.$

4.21. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx.$ **Жауабы:** $2\sqrt{1+x} \arccos x - 4\sqrt{1-x} + C.$

4.22. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right) + C.$

4.23. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2x + C.$

4.24. $\int \operatorname{arctg}(x+5) dx.$

Жауабы: $x\operatorname{arctg}(x+5)-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+10x+26\right|+5\operatorname{arctg}(x+5)+C.$

4.25. $\int x^2 \operatorname{arcctg} x dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^3}{3}\operatorname{arcctg} x+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right)+C.$

4.26. $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx.$

Жауабы: $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.$

4.27. $\int x^2 \cos\frac{x}{3} dx.$ **Жауабы:** $3x^2\sin\frac{x}{3}+18x\frac{x}{3}-54\sin\frac{x}{3}+C.$

4.28. $\int x \operatorname{arcctg}^2 x dx.$

Жауабы: $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcctg}^2 x+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}^2 x+x\operatorname{arcctg} x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.$

4.29. $\int x^2 \sin 2x dx.$ **Жауабы:** $\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

4.30. $\int\left(x^2+4\right)e^{2x}dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{2}\left(x^2+4\right)e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C.$

5.

5.1. $\int x^2 \cos 2x dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

5.2. $\int x\sin^2 x dx.$ **Жауабы:** $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C.$

5.3. $\int x\sin x\cos x dx.$ **Жауабы:** $\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x+C.$

5.4. $\int x^2(\sin 2x-3)dx.$

Жауабы: $\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 2x-x^3+C.$

5.5. $\int x^2(\sin x+1)dx.$ **Жауабы:** $2x\sin x-x^2\cos x+2\cos x+\dfrac{x^3}{3}+C.$

5.6. $\int\left(x^2+x\right)e^{-x}dx.$ **Жауабы:** $C-\left(x^2+3x+3\right)e^{-x}.$

5.7. $\int\left(x^2+x\right)e^{x}dx.$ **Жауабы:** $\left(x^2-x+1\right)e^{x}+C.$

5.8. $\int\left(x^2-x+1\right)e^{-x}dx.$ **Жауабы:** $C-\left(x^2+x+2\right)e^{-x}.$

5.9. $\int\left(x^2-x+1\right)e^{x}dx.$ **Жауабы:** $\left(x^3-3x+4\right)e^{x}+C.$

5.10. $\int x\operatorname{ctg}^2 x dx.$ **Жауабы:** $\ln|\sin x|-x\operatorname{ctg}x-\dfrac{x^2}{2}+C.$

5.11. $\int x^2e^{-x}dx.$ **Жауабы:** $C-\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}.$

5.12. $\int\dfrac{xdx}{\sin^2 x}.$ **Жауабы:** $\ln|\sin x|-x\operatorname{ctg}x+C.$

5.13. $\int\dfrac{xdx}{\cos^2 x}.$ **Жауабы:** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C.$

5.14. $\int x\operatorname{tg}^2 x dx.$ **Жауабы:** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C.$

5.15. $\int\left(x^2+2\right)e^{-x}dx.$ **Жауабы:** $C-\left(x^2+2x+4\right)e^{-x}.$

5.16. $\int x^2\sin^2 x dx.$ **Жауабы:** $\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{4}\sin 2x+\dfrac{x}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+C.$

5.17. $\int x^2(\cos 2x+3)dx.$

Жауабы: $x^3+\dfrac{x^2}{2}\sin 2x+\dfrac{x}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C.$

5.18. $\int\left(x^2+2\right)e^{x}dx.$ **Жауабы:** $\left(x^2-2x+4\right)e^{-x}+C.$

5.19. $\int\left(x^2+3\right)\sin x dx.$

Жауабы: $2x\sin x-\left(x^2+1\right)\cos x+C.$**)**

5.20. $\int\left(x^2-3\right)\cos x dx.$ **Жауабы:** $\left(x^2-4\right)\sin x+2x\cos x+C.$

5.21. $\int\left(x^2+1\right)e^{-x}dx.$ **Жауабы:** $C-\left(x^2+2x+3\right)e^{-x}.$

5.22. $\int\left(x^2-1\right)e^{x}dx.$ **Жауабы:** $\left(x-1\right)^2e^x+C.$

5.23. $\int x^2\cos^2 x dx.$ **Ж:** $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{4}\sin 2x+\dfrac{x}{4}\cos 2x-\dfrac{1}{8}\sin 2x+C.$

5.24. $\int\left(x^2+x\right)\sin x dx.$

Жауабы: $\left(2x+1\right)\sin x-\left(x^2+x-2\right)\cos x+C.$

5.25. $\int\left(x^2+x\right)\cos x dx.$

Жауабы: $\left(x^2+x-1\right)\sin x+\left(2x+1\right)\cos x+C.$**)**

5.26. $\int\left(x^2+1\right)e^{x}dx.$ **Жауабы:** $\left(x^2-2x+3\right)e^x+C.$

5.27. $\int\left(x^2-1\right)e^{-x}dx.$ **Жауабы:** $C-\left(x+1\right)^2e^{-x}.$

5.28. $\int x\sin^2 x dx.$ **Жауабы:** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}\sin 2x-\dfrac{1}{8}\cos 2x+C.$

5.29. $\int\arcsin 9x dx.$ **Жауабы:** $x\arcsin 9x+\dfrac{1}{9}\sqrt{1-81x^2}+C.$

5.30. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,2x dx.$ **Жауабы:** $\dfrac{x^2}{2}\mathrm{arcctg}\,2x+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{8}\mathrm{arcctg}\,2x+C.$

6.

6.1. $\int\left(x+1\right)e^{2x}dx.$

6.2. $\int\left(x-2\right)e^{x}dx.$

6.3. $\int\left(x-7\right)\cos 2x dx.$

6.4. $\int\left(1-x\right)\cos 5x dx.$

6.5. $\int\left(x+2\right)\cos 3x dx.$

6.6. $\int\left(x-2\right)\cos 4x dx.$

6.7. $\int (x-4)\sin 2x dx.$

6.8. $\int (x-3)\cos x dx.$

6.9. $\int (x+4)\sin 2x dx.$

6.10. $\int x\sin 3x dx.$

6.11. $\int (x+5)\sin x dx.$

6.12. $\int (x-5)\cos x dx.$

6.13. $\int (x+9)\sin x dx.$

6.14. $\int (x+7)\sin 2x dx.$

6.15. $\int (x+4)\sin 3x dx.$

6.16. $\int (x+3)\sin 5x dx.$

6.17. $\int (x-4)\cos 2x dx.$

6.18. $\int (x-8)\sin x dx.$

6.19. $\int (x+4)\cos 3x dx.$

6.20. $\int (x+8)\sin 3x dx.$

6.21. $\int (x+6)\cos 4x dx.$

6.22. $\int (x-6)\sin \frac{x}{2} dx.$

6.23. $\int (x+1)\cos 7x dx.$

6.24. $\int (x+2)\sin \frac{x}{2} dx.$

6.25. $\int x\sin \frac{x}{5} dx.$

6.26. $\int (x+4)\cos \frac{x}{2} dx.$

6.27. $\int (x+1)\sin \frac{x}{3} dx.$

6.28. $\int (x+2)\cos \frac{x}{4} dx.$

6.29. $\int (x+3)\sin \frac{x}{4} dx.$

6.30. $\int (x-9)\sin \frac{x}{2} dx.$

7.

7.1. $\int \ln(x-5) dx.$

7.2. $\int \operatorname{arctg} 2x dx.$

7.3. $\int x^2 e^{-x} dx.$

7.4. $\int (x+1)e^{-4x} dx.$

7.5. $\int x^2 e^{-2x} dx.$

7.6. $\int \operatorname{arctg} 3x dx.$

7.7. $\int x\cos 8x dx.$

7.8. $\int \operatorname{arctg} 4x dx.$

7.9. $\int \arcsin 5x dx.$

7.10. $\int (x+1)e^{-x} dx.$

7.11. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

7.12. $\int x^2 e^{3x} dx.$

7.13. $\int x\cos(x+4)dx.$

7.14. $\int x\cos(x-2)dx.$

7.15. $\int x\cos(x+3)dx.$

7.16. $\int xe^{x+2}dx.$

7.17. $\int xe^{-7x}dx.$

7.18. $\int \arcsin 2x dx.$

7.19. $\int x\sin(x+7)dx.$

7.20. $\int x\cos(x-4)dx.$

7.21. $\int x\sin(x+4)dx.$

7.22. $\int x\cos(x+9)dx.$

7.23. $\int (x+3)e^{-x}dx.$

7.24. $\int \arccos x dx.$

7.25. $\int \left(x^2-3\right)e^{x}dx.$

7.26. $\int xe^{-4x}dx.$

7.27. $\int x\cos(x+7)dx.$

7.28. $\int xe^{-5x}dx.$

7.29. $\int xe^{x+3}dx.$

7.30. $\int x\cos(2-x)dx.$

8.

8.1. $\int \operatorname{arctg} 2x dx.$

8.2. $\int x\cos 6x dx.$

8.3. $\int \arcsin 3x dx.$

8.4. $\int \arccos 2x dx.$

8.5. $\int \operatorname{arctg} 8x dx.$

8.6. $\int x\sin(x-2)dx.$

8.7. $\int \arcsin 8x dx.$

8.8. $\int x\sin(x+3)dx.$

8.9. $\int x\cos(x+4)dx.$

8.10. $\int \arccos 7x dx.$

8.11. $\int x\cos(x-7)dx.$

8.12. $\int x\sin(x-5)dx.$

8.13. $\int (x-4)e^{x}dx.$

8.14. $\int xe^{-6x}dx.$

8.15. $\int \operatorname{arctg} 7x dx.$

8.16. $\int \arcsin 5x dx.$

8.17. $\int \ln(x-7)dx.$

8.18. $\int x\cos(x+6)dx.$

8.19. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx.$

8.20. $\int \ln(x+8)dx.$

8.21. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{5}dx.$

8.22. $\int \ln(x+12)dx.$

8.23. $\int \arcsin\frac{x}{5}dx.$

8.24. $\int \ln(2x-1)dx.$

8.25. $\int \ln(2x+3)dx.$

8.26. $\int \arccos\frac{x}{5}dx.$

8.27. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{4}dx.$

8.28. $\int \arcsin\frac{x}{7}dx.$

8.29. $\int \operatorname{arctg}6x dx.$

8.30. $\int \arccos\frac{x}{3}dx.$

7.3- ҮТ шығару үлгісі

Анықталмаған интегралды табыңыз

1. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx.$

► $$\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 4\sin t, dx = 4\cos t dt, \\ \sin t = \dfrac{x}{4}, t = \arcsin\dfrac{x}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int 16\sin^2 t\sqrt{16-16\sin^2 t}\,4\cos t dt = 256\int \sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= 64\int \sin^2 t2 t dt = 32\int (1-\cos 4t)dt = 32t - 8\sin 4t + C =$$

$$= 32\arcsin\frac{x}{4} - 8\sin 4\left(\arcsin\frac{x}{4}\right) + C =$$

$$= 32\arcsin\frac{x}{4} - \frac{x}{4}\left(8-x^2\right)\sqrt{16-x^2} + C.$$ ◄

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

► $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}dx = \left| \begin{matrix} x=\frac{1}{t}, t=\frac{1}{x}, \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt, \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{t^2\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} =$

$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} = -\int \frac{dt}{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}} = -\ln\left| t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1} \right| + C =$

$= -\ln\left| \frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+1} \right| + C \; = C - \ln\left| \frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{x^2+5x+1}}{x} \right|$. ◄

3. $\int (x-7)\sin 5x dx.$

► $\int (x-7)\sin 5x dx = \left| \begin{matrix} u=x-7, du=dx, \\ dv=\sin 5x dx, v=-\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right| =$

$= -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x dx = -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C.$

◄

4. $\int \arccos 4x dx.$

► $\int \arccos 4x dx = \left| \begin{matrix} u=\arccos 4x, du=-\frac{4dx}{\sqrt{1-16x^2}} \\ dv=dx, v=x \end{matrix} \right| = x\arccos 4x +$

$$+4\int\frac{xdx}{\sqrt{1-16x^2}}=x\arccos 4x-\frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2}+C. \quad ◄$$

5. $\int xe^{x-7}dx.$

$$► \int xe^{x-7}dx=\left|\begin{matrix} u=x, du=dx, \\ dv=e^{x-7}dx, v=e^{x-7}\end{matrix}\right|=xe^{x-7}-\int e^{x-7}dx=$$

$$=xe^{x-7}-e^{x-7}+C. \quad ◄$$

6. $\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ ►

$$\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg}x, du=\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv=\dfrac{xdx}{1+x^2}, v=\sqrt{1+x^2}\end{matrix}\right|=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C. \quad ◄$$

7. $\int\left(x^2-4x+3\right)e^{-2x}dx.$

$$► \int\left(x^2-4x+3\right)e^{-2x}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2-4x+3, du=\left(2x-4\right)dx, \\ dv=e^{-2x}dx, v=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)e^{-2x}+\int\left(x-2\right)e^{-2x}dx=\left|\begin{matrix} u=x-2, du=dx, \\ dv=e^{-2x}dx, v=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)e^{-2x}-\frac{1}{2}\left(x-2\right)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C. \quad ◄$$

8. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x+1))\ln(x+1)}{x+1}dx.$

►

$$\int \frac{\ln(\ln(x+1))\ln(x+1)}{x+1}dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln(\ln(x+1)),\, du=\dfrac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}, \\ dv=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}dx,\, v=\dfrac{1}{2}\ln^2(x+1) \end{array} \right| =$$

$$=\frac{\ln^2(x+1)}{2}\ln(\ln(x+1))-\frac{1}{2}\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=$$

$$=\frac{\ln^2(x+1)}{2}\ln(\ln(x+1))-\frac{1}{4}\ln^2(x+1)+C. \quad ◄$$

7.4-ЖҮТ
Анықталмаған интегралды табыңыз

1.

1.1. $\displaystyle\int\frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx.$

(Жауабы: $6\ln|x+3|-\ln|x+1|-2\ln|x+5|+C.$ **)**

1.2. $\displaystyle\int\frac{12dx}{(x-2)(x^2-2x+3)}.$

(Жауабы: $3\ln|x-3|-4\ln|x-2|+\ln|x+1|+C.$ **)**

1.3. $\displaystyle\int\frac{43x+67}{(x-1)(x^2-x-12)}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x-1|+5\ln|x-4|-7\ln|x+3|+C.$ **)**

1.4. $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{\left(x^2+x-2\right)(x+3)}dx.$

(Жауабы: $x^2+5\ln|x+3|+\ln|x+2|+\ln|x-1|+C.$ **)**

1.5. $\int \frac{8xdx}{\left(x^2+6x+5\right)(x+3)}.$

(Жауабы: $-5\ln|x+5|+6\ln|x+3|-\ln|x+1|+C.$ **)**

1.6. $\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2-8x}{\left(x^2-5x+6\right)(x+1)}dx.$

(Жауабы: $x^2+x+2\ln|x+1|+4\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C.$ **)**

1.7. $\int \frac{2x^4+8x^3-45x-61}{(x-1)\left(x^2+5x+6\right)}dx.$

(Жауабы: $x^2-8\ln|x-1|+5\ln|x+3|+\ln|x+2|+C.$ **)**

1.8. $\int \frac{2x^4+17x^3+32x^2-7x}{\left(x^2+4x+3\right)(x+5)}dx.$

(Жауабы: $x^2-x-5\ln|x+5|+3\ln|x+1|-3\ln|x+3|+C.$ **)**

1.9. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)\left(x^2+x-2\right)}dx.$

(Жауабы: $3\ln|x+1|+\ln|x-1|+2\ln|x+2|+C.$ **)**

1.10. $\int \frac{37x-85}{\left(x^2+2x-3\right)(x-4)}dx.$

(Жауабы: $4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+3\ln|x-4|+C.$ **)**

1.11. $\int \frac{3x^2+3x-24}{\left(x^2-x-2\right)\left(x-3\right)}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x-2|+3\ln|x-3|-2\ln|x+1|+C.$**)**

1.12. $\int \frac{2x^4-7x^3+3x+30}{\left(x-2\right)\left(x^2-2x-3\right)}dx.$

(Жауабы: $x^2+x-4\ln|x-2|+3\ln|x-3|+3\ln|x+1|+C.$**)**

1.13. $\int \frac{3x^2-15}{\left(x-1\right)\left(x^2+5x+6\right)}dx.$

(Жауабы: $\ln|x+2|-\ln|x-1|+3\ln|x+3|+C.$**)**

1.14. $\int \frac{x^2-19x+6}{\left(x-1\right)\left(x^2+5x+6\right)}dx.$

(Жауабы: $18\ln|x+3|-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+C.$**)**

1.15. $\int \frac{6xdx}{x^3+2x^2-x-2}.$

(Жауабы: $\ln|x-1|+3\ln|x+1|-4\ln|x+2|+C.$**)**

1.16. $\int \frac{4x^2+32x+52}{\left(x^2+6x+5\right)\left(x+3\right)}dx.$

(Жауабы: $3\ln|x+1|+2\ln|x+3|-\ln|x+5|+C.$**)**

1.17. $\int \frac{2x^2+41x-91}{\left(x^2+2x-3\right)\left(x-4\right)}dx.$

(Жауабы: $4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C.$ **)**

1.18. $\int \frac{2x^4+8x^3-17x-5}{\left(x^2+2x-3\right)\left(x+2\right)}dx.$

(Жауабы: $x^2-\ln|x-1|+\ln|x+2|-2\ln|x+3|+C.$**)**

1.19. $\int \frac{2x^4+17x^3+40x^2+37x+36}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx.$

(Жауабы: $x^2-x+3\ln|x+1|+3\ln|x+3|-3\ln|x+5|+C.$**)**

1.20. $\int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)}dx.$

(Жауабы: $\ln|x-1|-3\ln|x+1|+8\ln|x+2|+C.$ **)**

1.21. $\int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx.$

(Жауабы: $3x^2-12x+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+32\ln|x+2|+C.$**)**

1.22. $\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x+3|-3\ln|x+1|+3\ln|x+5|+C.$**)**

1.23. $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx.$

(Жауабы: $6\ln|x+3|-2\ln|x+1|-2\ln|x+5|+C.$**)**

1.24. $\int \frac{2x^4-5x^3-15x^2+40x-70}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx.$

(Жауабы: $x^2-x+4\ln|x-1|-\ln|x+3|+2\ln|x-4|+C.$**)**

1.25. $\int \frac{2x^4-7x^3+2x^2+13}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx.$

(Жауабы: $x^2+x+2\ln|x+1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|+C.$**)**

1.26. $\int \frac{6x^4-21x^2+3x+24}{(x^2+x-2)(x+1)}dx.$

(Жауабы: $3x^2-12x+2\ln|x-1|-3\ln|x+1|+10\ln|x+2|+C.$**)**

1.27. $\int \frac{2x^4-3x^3-21x^2-26}{\left(x^2-5x+4\right)\left(x+3\right)}dx.$

(Жауабы: $x^2+x+4\ln|x-1|+\ln|x+3|-2\ln|x-4|+C.$ **)**

1.28. $\int \frac{7x^2-17x}{(x-2)\left(x^2-2x-3\right)}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+2\ln|x+1|+C.$ **)**

1.29. $\int \frac{6x^4-30x^2+30}{\left(x^2-1\right)(x+2)}dx.$

(Жауабы: $3x^2-12x+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C.$ **)**

1.30. $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x-1)\left(x^2+5x+6\right)}dx.$

(Жауабы: $20\ln|x+3|-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+C.$ **)**

2.

2.1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$ **(Жауабы:** $x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C.$ **)**

2.2. $\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx.$ **(Жауабы:** $x+\ln|x|+\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C.$ **)**

2.3. ауданын табу керек болса, онда келесі формуланы қолдануға болады:

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx. \qquad (3)$$

$\int \frac{3x^2+1}{(x-1)\left(x^2-1\right)}dx.$ **(Жауабы:** $2\ln|x-1|+-\frac{2}{x-1}+\ln|x+1|+C.$ **)**

2.4. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{2}{x}-3\ln|x|+3\ln|x-1|+C.$**)**

2.5. $\int \frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}dx.$

(**Жауабы:** $2x^2-3\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{4}{x+1}+C.$)

2.6. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx.$ (**Жауабы:** $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{2}{x}+C.$)

2.7. $\int \frac{4x^2}{\left(x^2-2x+1\right)\left(x+1\right)}dx.$

(**Жауабы:** $3\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\ln|x+1|+C.$)

2.8. $\int \frac{2x^2-2x+1}{x^2-x^3}dx.$ (**Жауабы:** $\frac{1}{x}-3\ln|x|+\ln|x-1|+C.$)

2.9. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx.$ (**Жауабы:** $\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+C.$)

2.10. $\int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x\left(x+1\right)^2}dx.$

(**Жауабы:** $2x^2-2\ln|x|-2\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+C.$)

2.11. $\int \frac{2x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x\left(x-1\right)^2}dx.$

(**Жауабы:** $x^2+\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}+C.$)

2.12. $\int \frac{3x-x^2-2}{x\left(x+1\right)^2}dx.$ (**Жауабы:** $\ln|x+1|-2\ln|x|-\frac{6}{x+1}+C.$)

2.13. $\int \frac{2x^3+1}{x^2\left(x+1\right)}dx.$ (**Жауабы:** $2x-\ln|x|-\frac{1}{x}-\ln|x+1|+C.$)

2.14. $\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}dx.$

(Жауабы: $x+\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|-\ln|x+1|+C.$**)**

2.15. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx.$ **(Жауабы:** $\ln|x|+\frac{6}{x+1}-\ln|x+1|+C.$**)**

2.16. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx.$ **(Жауабы:** $2\ln|x|-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C.$ **)**

2.17. $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}dx.$

(Жауабы: $2x^2-\ln|x|-3\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+C.$**)**

2.18. $\int \frac{4xdx}{(x^2-1)(x+1)}.$ **(Жауабы:** $\ln|x-1|-\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}+C.$ **)**

2.19. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}.$ **(Жауабы:** $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C.$**)**

2.20. $\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}dx.$ **(Жауабы:** $x-\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C.$ **)**

2.21. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}dx.$ **(Жауабы:** $-\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C.$ **)**

2.22. $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}dx.$ **(Жауабы:** $2x+\ln|x|-\frac{3}{x}-\ln|x+1|+C.$**)**

2.23. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}dx.$

(Жауабы: $x-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+2\ln|x+1|+C.$**)**

2.24. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx.$ **(Жауабы:** $2\ln|x|+\ln|x+1|+\frac{5}{x+1}+C.$**)**

2.25. $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx.$ **(Жауабы:** $\ln|x+1|-\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C.$**)**

2.26. $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}dx.$ **(Жауабы:** $2\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+C.$**)**

2.27. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}dx.$ **(Жауабы:** $2\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{2}{x}+C.$**)**

2.28. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{x}-\ln|x|+\ln|x-1|+C.$**)**

2.29. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx.$ **(Жауабы:** $\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C.$**)**

2.30. $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx.$ **(Жауабы:** $2x+\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x+1|+C.$**)**

3.

3.1. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x-1|-\ln|x^2+2x+5|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$**)**

3.2. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$**)**

3.3. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx.$

(**Жауабы:** $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13|-arctg\frac{x-2}{3}+C.$**)**

3.4. $\int\frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$

(**Жауабы:** $3\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|-2arctg\frac{x+1}{2}+C.$**)**

3.5. $\int\frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx.$

(**Жауабы:** $\ln|x^2+6x+13|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$**)**

3.6. $\int\frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx.$

(**Жауабы:** $2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$**)**

3.7. $\int\frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}.$

(**Жауабы:** $2\ln|x+2|-\ln|x^2-2x+10|+2\mathrm{arctg}\frac{x-1}{3}+C.$**)**

3.8. $\int\frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx.$

(**Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13|-\ln|x+1|+2\mathrm{arctg}\frac{x-2}{3}+C.$**)**

3.9. $\int\frac{7x-10}{x^3+8}dx.$

(**Жауабы:** $\ln|x^2-2x+4|-2\ln|x+2|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$**)**

3.10. $\int\frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$

(**Жауабы:** $3\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$)

3.11. $\int\frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx.$

(**Жауабы:** $\ln|x|-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$)

3.12. $\int\frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$ (**Жауабы:** $\int_0^1\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$)

3.13. $\int\frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx.$

(**Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4|-2\ln|x+2|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$)

3.14. $\int\frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx.$

(**Жауабы:** $3\ln|x+1|-\ln|x^2-4x+13|-\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.$)

3.15. $\int\frac{3-9x}{x^3-1}dx.$

(**Жауабы:** $\ln|x^2+x+1|-2\ln|x-1|-4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$)

3.16. $\int\frac{6-9x}{x^3+8}dx.$

(**Жауабы:** $2\ln|x+2|-\ln|x^2+2x+4|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$)

3.17. $\int\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$

(**Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+10|-\ln|x+2|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.$)

3.18. $\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx.$

(Жауабы: $3\ln|x+1|-\ln|x^2+6x+13|-5\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$**)**

3.19. $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x-1|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$**)**

3.20. $\int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx.$

(Жауабы: $\ln|x^2-4x+13|-3\ln|x+1|+3\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.$**)**

3.21. $\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$

(Жауабы: $3\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+10|-\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.$**)**

3.22. $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}.$

(Жауабы: $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13|-\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$**)**

3.23. $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx.$

(Жауабы: $\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13|+3\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.$**)**

3.24. $\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx.$

(Жауабы: $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$**)**

3.25. $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x+2|+\ln|x^2-2x+4|+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$**)**

3.26. $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x-1|+\ln|x^2+2x+5|+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$**)**

3.27. $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx.$

(Жауабы: $2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$**)**

3.28. $\int \frac{6xdx}{x^3-1}.$

(Жауабы: $2\ln|x-1|-\ln|x^2+x+1|+2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$**)**

3.29. $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx.$

(Жауабы: $3\ln|x+1|+\ln|x^2+6x+13|-\frac{9}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$**)**

3.30. $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$

(Жауабы: $\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+10|+\frac{5}{3}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{3}+C.$**)**

4.

4.1. $\int \frac{5xdx}{x^4+3x^2-4}.$

(Жауабы: $\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C.$**)**

4.2. $\int \frac{2x^5-2x+1}{1-x^4}dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{4}\ln|x+1|-x^2-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$**)**

4.3. $\int \frac{x^4+x^3+2x^2+x+2}{x^4+5x^2+4}dx.$

(Жауабы: $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

4.4. $\int \frac{5xdx}{x^4+3x^2-4}.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

4.5. $\int \frac{x^3+8x-2}{x^4+4x^2}dx.$ **(Ж:** $2\ln|x|-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

4.6. $\int \frac{2x^3-2x^2+5}{(x-1)^2(x^2+4)}dx.$

(Жауабы: $\ln|x^2+4|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

4.7. $\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^4-x^2}dx.$ **(Ж:** $\ln|x|-\frac{3}{2}-\ln|x-1|+\ln|x+1|+C.$**)**

4.8. $\int_0^{\pi/4} x\operatorname{tg}^2 x\,dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

4.9. $\int \frac{x^3-x-1}{x^4-x^2}dx.$ **(Жауабы:** $\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$**)**

4.10. $\int \frac{2x^2-7x+10}{(x-1)\left(x^3-x^2+4x-4\right)}dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

4.11. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx.$

(Жауабы: $\ln|x|-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

4.12. $\int \frac{x^3-x+2}{x^4-x^2}dx.$ **(Жауабы:** $\ln|x|+\frac{2}{x}+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C.$**)**

4.13. $\int \frac{x^2+2x+4}{x^4+5x^2+4}dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\left|x^2+1\right|+\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3}\ln\left|x^2+4\right|+C.$**)**

4.14. $\int \frac{2x^5-2x^3+x^2}{1-x^4}dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{4}\ln|x+1|+\ln\left|x^2+1\right|-\frac{1}{4}\ln|x-1|-x^2-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$**)**

4.15. $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}.$ **(Жауабы:** $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arct}g\frac{x}{2}+C.$**)**

4.16. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}dx.$

(Жауабы: $\ln|x-1|-\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}x+C.$**)**

4.17. $\int \frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}dx.$ **(Жауабы:** $\ln|x|+\frac{3}{4x}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

4.18. $\int \frac{7x-2}{(x-1)\left(x^2+4\right)}dx.$

(Жауабы: $\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$ **)**

4.19. $\int \frac{x^3+2x^2+4x-2}{x^4+3x^2-4}dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$ **)**

4.20. $\int \frac{4x^2-2}{x^4-x^2}dx.$ **(Жауабы:** $\ln|x-1|-\frac{2}{x}-\ln|x+1|+C.$ **)**

4.21. $\int \frac{2x^3-2x-5}{x^4+3x^2-4}dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\ln\left|x^2+4\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$ **)**

4.22. $\int \frac{3x-8}{(x-1)^2\left(x^2+4\right)}dx.$

(Жауабы: $\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C.$ **)**

4.23. $\int \frac{x^2dx}{x^4+5x^2+4}.$ **(Жауабы:** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x+C.$ **)**

4.24. $\int \frac{2-8x}{x^4+4x^2}dx.$

(Жауабы: $\ln\left|x^2+4\right|-2\ln|x|-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$ **)**

4.25. $\int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1}dx.$

(Жауабы: $\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{4}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$ **)**

4.26. $\int \frac{2x^3+8x-3x^2-27}{x^4+13x^2+36}dx.$ **(Жауабы:** $\ln\left|x^2+9\right|-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

4.27. $\int \frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}dx.$

(Жауабы: $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+9\right|+\ln\left|x^2+1\right|-\operatorname{arctg}x+C.$**)**

4.28. $\int \frac{2x^5-2x^3-x}{1-x^4}dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-x^2+\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$**)**

4.29. $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4}dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x+C.$**)**

4.30. $\int \frac{2x+3}{(x-1)\left(x^3-x^2+4x-4\right)}dx.$ **(Жауабы:** $-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$**)**

5.

5.1. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x+3}-4\ln\left|\sqrt{x+3}+2\right|+C.$**)**

5.2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}.$ **(Жауабы:** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}-6\sqrt{x+3}+C.$**)**

5.3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}.$ **(Жауабы:** $\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}-4\sqrt{(x-3)^3}+18\sqrt{x-3}+C.$**)**

5.4. $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}.$

(Жауабы: $\frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3}-2(x+4)+2\sqrt{x+4}-4\ln\left|\sqrt{x+4}+2\right|+C.$ **)**

5.5. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}.$

(Жауабы: $\frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7}-\frac{18}{5}\sqrt{(x+1)^5}+9\sqrt{(x+1)^3}-54\sqrt{x+1}+C.$ **)**

5.6. $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}dx.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C.$**)**

5.7. $\int\frac{dx}{(x+1)+\sqrt{x+4}}.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{3}}\right|+C.$**)**

5.8. $\int\frac{\sqrt{x+2}}{x-3}dx.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x+2}+\sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right|+C.$**)**

5.9. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+3}.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x}-6\ln\sqrt{x}+3+C.$**)**

5.10. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}.$ **(Жауабы:** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{3}}+C.$ **)**

5.11. $\int\frac{1+x}{x+\sqrt{x}}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{4}-4\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$**)**

5.12. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$ **(Жауабы:** $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C.$**)**

5.13. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-1}.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C.$ **)**

5.14. $\int\frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x+5}-6\ln\left|\sqrt{x+5}+3\right|+C.$ **)**

5.15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x-1}-2\ln\left|1+\sqrt{x-1}\right|+C.$**)**

5.16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}.$ **(Жауабы:** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x-7}+C.$**)**

5.17. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x-1}+2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C.$**)**

5.18. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-7}}.$

(Жауабы: $\frac{2}{7}\sqrt{(x-7)^7}+\frac{6}{5}\sqrt{(x-7)^5}+2\sqrt{(x-7)^3}+2\sqrt{x-7}+C.$**)**

5.19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-4}}.$

(Жауабы: $\frac{2}{5}\sqrt{(x-4)^5}+\frac{4}{3}\sqrt{(x-4)^3}+2\sqrt{x-4}+C.$ **)**

5.20. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x+4}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x+4}+C.$**)**

5.21. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}.$

(Жауабы: $\frac{2}{7}\sqrt{(x+2)^7}-\frac{12}{5}\sqrt{(x+2)^5}+8\sqrt{(x+2)^3}-16\sqrt{x+2}+C.$ **)**

5.22. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+10}.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x}-2\sqrt{10}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{10}}+C.$**)**

5.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$ **(Жауабы:** $\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)+C.$**)**

5.24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x-2}-2\ln\left|1+\sqrt{x-2}\right|+C.$**)**

5.25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$. **(Жауабы:** $\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$**)**

5.26. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$. **(Жауабы:** $\frac{2}{5}\sqrt{(x-2)^5}+\frac{8}{3}\sqrt{(x-2)^3}+8\sqrt{x-2}+C.$**)**

5.27. $\int \frac{x-1dx}{x\sqrt{x-2}}$. **(Жауабы:** $2\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$**)**

5.28. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+6}}$.

(Жауабы: $\frac{2}{7}\sqrt{(x+6)^7}+\frac{12}{5}\sqrt{(x+6)^5}+8\sqrt{(x+6)^3}+16\sqrt{x+6}+C.$**)**

5.29. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$. **(Жауабы:** $2\sqrt{x-6}-6\ln\left|\sqrt{x-6}+3\right|+C.$**)**

5.30. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$. **(Жауабы:** $2\sqrt{x-8}-4\ln\left|\sqrt{x-8}+2\right|+C.$**)**

6.

6.1. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\sqrt{x+1}}dx.$

(Жауабы: $3\sqrt[3]{x+1}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}-3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|-$

$-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.$**)**

6.2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx.$

(Жауабы: $x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+4\,\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$**)**

6.3. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

(Жауабы: $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-(x+1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+C.$**)**

6.4. $\int\frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx.$ **(Жауабы:** $x+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+C.$ **)**

6.5. $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$**)**

6.6. $\int\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5}+C.$**)**

6.7. $\int\frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}.$

(Жауабы: $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x-1)^7}-(x-1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+$

$+2\sqrt{x-1}-3\sqrt[3]{x-1}+6\sqrt[6]{x-1}-6\ln\left|\sqrt[6]{x-1}+1\right|+C.$**)**

6.8. $\int\frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx.$

(Жауабы: $x-1-\frac{24}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}+12\sqrt[3]{(x-1)^2}+96\sqrt[3]{x-1}-$

$-384\sqrt[6]{x-1}+768\ln\left|\sqrt[6]{x-1}+2\right|+C.$ **)**

6.9. $\int\frac{\sqrt{x+3}dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}.$

(Жауабы: $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+3)^7}-(x+3)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+3)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}+$

$+2\sqrt{x+3}-3\sqrt[3]{x+3}+6\sqrt[6]{x+3}-6\ln\left|\sqrt[6]{x+3}+1\right|+C.$**)**

6.10. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}$.

(Жауабы: $\frac{2}{3}\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x-1}-6\sqrt[6]{x-1}+$

$6\ln\left|\sqrt[6]{x-1}+1\right|+C.$**)**

6.11. $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$.

(Ж: $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+3)^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+3)^5}+2\sqrt{x+3}-6\sqrt[6]{x+3}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+3}+C.$

6.12. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx.$

(Жауабы: $x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-$

$-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$**)**

6.13. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}dx}{\sqrt[3]{x+3+\sqrt{x+3}}}$.

(Жауабы: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}-2\sqrt{x+3}+3\sqrt[3]{x+3}-6\sqrt[6]{x+3}+$

$+6\ln\left|\sqrt[6]{x+3}+1\right|+C.$**)**

6.14. $\int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}dx.$

(Жауабы: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C$**)**

6.15. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x}}dx.$

(**Жауабы:** $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}+C.$

6.16. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$

(**Жауабы:** $\dfrac{1}{3}(3x+1)-\dfrac{4}{5}\sqrt[6]{3(x+1)^5}+2\sqrt[3]{(3x+1)^2}-4\sqrt{3x+1}+$

$+12\sqrt[3]{3x+1}-48\sqrt[6]{3x+1}+96\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}+2\right|+C.$)

6.17. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}.$

(**Жауабы:** $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$)

6.18. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}\,dx.$

(**Жауабы:** $\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}+9\sqrt[3]{x}+30\sqrt[6]{x}+$

$+\dfrac{54}{\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2\sqrt[6]{x}-1-\sqrt{5}}{2\sqrt[6]{x}-1+\sqrt{5}}\right|+24\ln\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$)

6.19. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[4]{x}}.$

(**Жауабы:** $-\dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-4\ln\left|1-\sqrt[4]{x}\right|+C.$)

6.20. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$

(**Жауабы:** $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\dfrac{4}{3}\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}+4\sqrt[6]{3x+1}+$

$$+4\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}-1\right|+C.)$$

6.21. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x}+24\sqrt[6]{x}+24\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2}\right|+C.$**)**

6.22. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$ **)**

6.23. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$**)**

6.24. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}.$ **(Жауабы:** $\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{x}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{9x}+C.$**)**

6.25. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}.$

(Жауабы: $3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+C.$ **)**

6.26. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C.$ **)**

6.27. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}.$

(Жауабы: $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[6]{x}-4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C.$ **)**

6.28. $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx.$

(**Жауабы:** $\frac{1}{3}(3x+1)-\frac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+$

$+2\sqrt[3]{3x+1}-4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}+1\right|+C.$)

6.29. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}.$ (**Жауабы:** $\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{8}\sqrt[6]{x}+\frac{3}{32}\ln\left|\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{2\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$)

6.30. $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)\sqrt{x+1}}dx.$

(**Жауабы:** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}-6\sqrt{3x+1}+3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|+$

$+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.$)

7.

7.1. $\int\frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}.$ (**Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}}+C.$)

7.2. $\int\frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}.$ (**Жауабы:** $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\,\mathrm{tg}(x/2)-4}{\sqrt{5}}+C.$)

7.3. $\int\frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx.$ (**Жауабы:** $2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3\ln\left|tg^2\frac{x}{2}+1\right|-2x+C.$)

7.4. $\int\frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}.$ (**Жауабы:** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}(x/2)-4}{\mathrm{tg}(x/2)-1}\right|+C.$)

7.5. $\int\frac{dx}{5\cos x+10\sin x}.$ (**Жауабы:** $-\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}(x/2)-2-\sqrt{5}}{\mathrm{tg}(x/2)-2+\sqrt{5}}\right|+C.$)

7.6. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$. **(Жауабы:** $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)-1}{2}+C.$**)**

7.7. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$**)**

7.8. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. **(Жауабы:** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-5}{\operatorname{tg}(x/2)-3}\right|+C.$**)**

7.9. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. **(Жауабы:** $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-2}{\operatorname{tg}(x/2)+2}\right|+C.$**)**

7.10. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C.$**)**

7.11. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. **(Жауабы:** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}(x/2)+4}{3}+C.$**)**

7.12. $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}+C.$**)**

7.13. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-1/2}{\operatorname{tg}(x/2)+2}\right|+C.$**)**

7.14. $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{58}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}(x/2)+7-\sqrt{58}}{3\operatorname{tg}(x/2)+7+\sqrt{58}}\right|+C.$**)**

7.15. $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$. **(Ж:** $-\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-4-\sqrt{21}}{\operatorname{tg}(x/2)-4+\sqrt{21}}\right|+C.$**)**

7.16. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$. **(Жауабы:** $-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-2}{\operatorname{tg}(x/2)-1/2}\right|+C.$**)**

7.17. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}$. **(Жауабы:** $3x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|+C.$**)**

7.18. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{15}}+C.$ **)**

7.19. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$. **(Жауабы:** $C-\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)+2}.$ **)**

7.20. $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx.$ **(Ж:** $12\operatorname{tg}\frac{x}{2}+6\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-5x+C.$ **)**

7.21. $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$. **(Жауабы:** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{7}}+C.$ **)**

7.22. $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx.$ **(Жауабы:** $6\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x+C.$ **)**

7.23. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$. **(Жауабы:** $C-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-1/3}{\operatorname{tg}(x/2)+3}\right|.$ **)**

7.24. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{2}+C.$ **)**

7.25. $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}(x/2)+2-\sqrt{13}}{3\operatorname{tg}(x/2)+2+\sqrt{13}}\right|+C.$ **)**

7.26. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C.$ **)**

7.27. $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}+C.$ **)**

7.28. $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-7}{\operatorname{tg}(x/2)-1}\right|+C.$ **)**

7.29. $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)+3-\sqrt{10}}{\operatorname{tg}(x/2)+3+\sqrt{10}}\right|+C.$ **)**

7.30. $\int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{5tg(x/2)+1-\sqrt{6}}{tg(x/2)+1+\sqrt{6}}\right|+C.$ **)**

8.

8.1. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x - 16\sin x \cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x}\right| + C.$**)**

8.2. $\int \frac{dx}{16\sin^2 x - 8\sin x \cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x - 1}{2\operatorname{tg} x}\right| + C.$**)**

8.3. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + C.$**)**

8.4. $\int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$. **(Жауабы:** $\ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 2\right| + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$**)**

8.5. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$**)**

8.6. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx$. **(Жауабы:** $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}^4 x - 1\right| + C.$**)**

8.7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} - \sqrt{5}}{2\operatorname{tg} x + \sqrt{5}}\right| + C.$**)**

8.8. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C.$**)**

8.9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$. **(Жауабы:** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right) + C.$**)**

8.10. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + \ln\left|\operatorname{tg} x\right| + C.$**)**

8.11. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$**)**

8.12. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 8\sin x \cos x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 2}\right| + C.$**)**

8.13. $\int \frac{\sin 2x}{4\sin^4 x + \cos^4 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}^2 x\right) + C.$**)**

8.14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$.

(Жауабы: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C.$ **)**

8.15. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2} + C.$ **)**

8.16. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{tg} x}\right| + C.$**)**

8.17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 3\cos^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{2}} + C.$ **)**

8.18. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\sqrt{5}\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}\right| + C.$**)**

8.19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

(Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}}\right| + C.$**)**

8.20. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$**)**

8.21. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C.$ **)**

8.22. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$**)**

8.23. $\int \frac{dx}{3 - 2\sin^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$**)**

8.24. $\int \frac{3\operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 4\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + C.$ **)**

8.25. $\int \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$ **)**

8.26. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)+C.$**)**

8.27. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x-\sin 2x+\cos^2 x}$. **(Жауабы:** $\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{2}+C.$**)**

8.28. $\int \frac{dx}{6-3\cos^2 x}$. **(Жауабы:** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}x\right)+C.$**)**

8.29. $\int \frac{\operatorname{tg}x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x+3\right|+C.$**)**

8.30. $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x-\cos^2 x}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{x}{4}+\frac{\sqrt{3}}{24}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1}\right|+C.$**)**

9.

9.1. $\int \cos^4 3x\sin^2 3x dx.$

(Жауабы: $\frac{1}{16}x-\frac{1}{192}\sin 12x+\frac{1}{144}\sin^3 6x+C.$**)**

9.2. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 x dx.$ **(Жауабы:** $\frac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^9 x}-\frac{5}{19}\sqrt[5]{\sin^{19} x}+C.$**)**

9.3. $\int \cos^3 x\sin^8 x dx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{9}\sin^9 x-\frac{1}{11}\sin^{11} x+C.$**)**

9.4. $\int \cos^4 x\sin^3 x dx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$**)**

9.5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}dx.$ **(Жауабы:** $C-3\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x}.$**)**

9.6. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 x2x dx.$

(Жауабы: $\frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^8 2x}-\frac{5}{36}\sqrt[5]{\sin^{18} 2x}+C.$**)**

9.7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx.$ **(Жауабы:** $3\sqrt[3]{\sin x}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{\sin^7 x}+C.$**)**

9.8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx.$ **(Жауабы:** $3\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x}+C.$**)**

9.9. $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{\cos^3 x}-\frac{3}{\cos x}+C.$**)**

9.10. $\int \sin^5 x\cos^4 xdx.$ **(Жауабы:** $\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+C.$**)**

9.11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{5}{12}\sqrt[5]{\cos^{12} x}-\frac{5}{2}\sqrt[5]{\cos^2 x}+C.$**)**

9.12. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 xdx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{11}\sqrt[3]{\cos^{11} x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^5 x}+C.$**)**

9.13. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 xdx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x}-\frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x}+C.$**)**

9.14. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\sin^3 2xdx.$

(Жауабы: $\frac{5}{36}\sqrt[5]{\cos^{18} 2x}-\frac{5}{16}\sqrt[5]{\cos^8 2x}+C.$**)**

9.15. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{5}{2}\sqrt[5]{\sin^2 x}-\frac{5}{12}\sqrt[5]{\sin^{12} x}+C.$**)**

9.16. $\int \sin^2 2x\cos^4 2xdx.$

(Жауабы: $\frac{1}{16}x-\frac{1}{128}\sin 8x+\frac{1}{96}\sin^3 4x+C.$**)**

9.17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{7}\sqrt[3]{\cos^7 x}-3\sqrt[3]{\cos x}+C.$**)**

9.18. $\int \sqrt[5]{\cos^4 x}\sin^3 xdx.$ **(Жауабы:** $\frac{5}{19}\sqrt[5]{\cos^{19} x}-\frac{5}{9}\sqrt[5]{\cos^9 x}+C.$**)**

9.19. $\int \sin^4 2x\cos^2 2xdx.$

(Жауабы: $\frac{1}{16}x-\frac{1}{128}\sin 8x+\frac{1}{96}\sin^3 4x+C.$**)**

9.20. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin 2x}-\frac{3}{14}\sqrt[3]{\sin^7 2x}+C.$**)**

9.21. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{14}\sqrt[3]{\cos^7 2x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos 2x}+C.$**)**

9.22. $\int \sin^4 x\cos^3 xdx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$**)**

9.23. $\int \sin^2 x\cos^4 xdx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$**)**

9.24. $\int \sin^4 x\cos^2 xdx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$**)**

9.25. $\int \sin^3 x\cos^8 xdx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{11}\cos^{11} x-\frac{1}{9}\cos^9 x+C.$**)**

9.26. $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}dx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{\sin x}-\frac{1}{\sin^3 x}+C.$**)**

9.27. $\int \sqrt[5]{\cos^3 x}\sin^5 xdx.$

(Жауабы: $\frac{5}{9}\sqrt[5]{\cos^{18} x}-\frac{5}{8}\sqrt[5]{\sin^8 x}-\frac{5}{28}\sqrt[5]{\cos^{28} x}+C.$**)**

9.28. $\int \sin^4 x\cos^5 xdx.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C.$**)**

9.29. $\int \sin^4 3x\cos^2 3xdx.$

(Жауабы: $\frac{1}{16}x-\frac{1}{192}\sin 12x-\frac{1}{144}\sin^3 6x+C.$**)**

9.30. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$ **(Жауабы:** $\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C.$ **)**

7.4-ҮТ шығару үлгісі

Анықталмаған интегралды табыңыз

$$\textbf{1.}\quad \int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2-5x+6)} dx.$$

► Интеграл астындағы дұрыс бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеу керек. (6.2.3п.). Ол үшін бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктейміз: $(x+1)(x-2)(x-3)$. Одан әрі (6.2.3п., 1-мысалды қараңыз)

$$\int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2-5x+6)} = \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Соңғы теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіріп және бөлшектердің алымдарын өзара теңестіріп, келесі тепе-теңдікті аламыз:

$$7x - x^2 - 4 \equiv A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2).$$

Мұндағы A, B, C коэффициенттерін дербес мәндер әдісінен (6.2.3п., мысал) табамыз:

$$\left.\begin{array}{l|l} x=-1 & -12 = 12A, \\ x=2 & 6 = -3B, \\ x=3 & 8 = 4C, \end{array}\right\}$$

Бұл әдістерден $A=-1, B=-2, C=2$ шығады. Табылған коэффициенттерді орындарына қойып, ең қарапайым бөлшектердің қосындысын аламыз. Оларды интегралдаймыз:

$$\int \frac{7x-x^2-4}{(x+1)\left(x^2-5x+6\right)}dx=\int\left(-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x-3}\right)dx=$$

$$=-\ln|x+1|-2\ln|x-2|+2\ln|x-3|+C^*=\ln\frac{(x-3)^2}{|x+1|(x-2)^2}+C^*,$$

C^* – интегралдау тұрақтысы. ◄

2. $\int \frac{15x-x^2-11}{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}dx.$

► Интеграл астындағы дұрыс бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейміз (6.2.3п., 2-мысал және 7.2.3п., 2-мысалды қараңыз):

$$\int \frac{15x-x^2-11}{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}dx=\int \frac{15x-x^2-11}{(x-1)^2(x+2)}dx=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} 15x-x^2-11\equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2, \\ \begin{array}{l|l} x=1 & 3=3B, \\ x=-2 & -45=9C, \\ x^2 & -1=A+C, \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\}\begin{array}{l} B=1, \\ C=-5, \\ A=4 \end{array} \end{array}\right|=$$

$$=\int\left(\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{5}{x+2}\right)=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-5\ln|x+2|+C^* \quad ◄$$

3. $I(x)=\int \frac{x^4-8x^3+23x^2-43x+27}{(x-2)\left(x^2-2x+5\right)}dx.$

► Мұнда алдымен бұрыс бөлшекті алымын бөліміне бөлу арқылы оны бүтін және дұрыс бөлшек қосындыларына келтіріп аламыз (7.2.3п., 1-мысалды қараңыз):

$$I\left(x\right)=\int\left(x-4+\frac{-2x^2+3x-13}{\left(x-2\right)\left(x^2-2x+5\right)}\right)dx\overset{8.6}{=}\frac{x^2}{2}-4x+$$

$$+\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{-2x^2+3x-13\equiv A\left(x^2-2x+5\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-2\right),} \\ x=2 & \left|-15=5A,\right. & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} & A=-3, \\ x^2 & \left|-2=A+B,\right. & & B=1, \\ x^0 & \left|-13=5A-2C,\right. & & C=-1 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\int\left(\frac{-3}{x-2}+\frac{x-1}{x^2-2x+5}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x=-3\ln\left|x-2\right|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+C^*.\quad\blacktriangleleft$$

4. $\displaystyle\int\frac{2x^3-5x^2+8x-22}{x^4+9x^2+20}dx.$

► 7.2.3п., 2-мысалда және 6.2.3п., 2-мысалда көрсетілгенді қолданамыз:

$$\int\frac{2x^3-5x^2+8x-22}{x^4+9x^2+20}dx=\int\frac{2x^3-5x^2+8x-22}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+5\right)}dx=$$

$$=\int\left(\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+5}\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} 2x^3-5x^2+8x-22\equiv(Ax+B)(x^2+5)+ \\ +(Cx+D)(x^2+4), \\ \begin{array}{l|l} x^3 & 2=A+B, \\ x^2 & -5=B+D, \\ x & 8=5A+4C, \\ x^0 & -22=5B+4D, \end{array}\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=0, B=-2, \\ C=2, D=-3 \end{array} \end{array}\right|$$

$$=\int\left(\frac{-2}{x^2+4}+\frac{2x-3}{x^2+5}\right)dx=-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln\left(x^2+5\right)-\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C^*.$$

◄

5. $\int\frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}dx.$

► Интеграл астында 7.2.4 п., I – түріндегі иррационал функция тұр.

$$\int\frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}dx\overset{8.7}{=}\left|\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=t, x-2=t^2, \\ x=t^2+2, dx=2tdt\end{array}\right|=-2\int\frac{\left(t^2+3\right)tdt}{t-3}=$$

$$=-2\int\left(t^2+3t+12+\frac{36}{t-3}\right)dt=-2\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+12t+36\ln|t-3|\right)+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}-3(x-2)-24\sqrt{x-2}-72\ln\left|\sqrt{x-2}-3\right|+C.$$

◄

6. $\int\frac{4\sqrt{x-2}+\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx.$

► Мұнда 7.2.4 п., 1-мысалда көрсетілгендей айнымал ауыстыруы жасалады:

$$\int \frac{4\sqrt{x-2}+\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx = \left| \begin{matrix} m = EKE(2,3,6) = 6, x-2 = t^6 \\ x = t^6+2, dx = 6t^5dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(4t^3 - t\right)6t^5dt}{t^3+2t^2} = 6\int \frac{4t^6-t^4}{t+2}dt =$$

$$= 6\int \left(4t^5 - 8t^4 + 15t^3 - 30t^2 + 60t - 120 + \frac{240}{t+2}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{2}{3}t^6 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{15}{4}t^4 - 10t^3 + 30t^2 - 120t + 240\ln|t+2|\right) + C =$$

$$= (x-2) - \frac{48}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5} + \frac{45}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2} - 60\sqrt{x-2} + 180\sqrt[3]{x-2} -$$

$$-720\sqrt[6]{x-2} + 1440\ln\left|\sqrt[6]{x-2}+2\right| + C.$$

◄

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1}.$

► Мұнда § 7.3 (1) – түріндегі интеграл тұр

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \ x = 2\operatorname{arctg} t \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int \frac{dt}{6t - 2 + 2t^2 + 1 + t^2} = 2\int \frac{dt}{3t^2 + 6t - 1} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1/3} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t+1)^2 - 4/3} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{t+1-2/\sqrt{3}}{t+1+2/\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2) + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2) + \sqrt{3} + 2}\right| + C. \qquad ◄$$

$$\textbf{8.}\quad \int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + 3\cos^2 x}.$$

► § 7.3 көрсетілгендей $t = \operatorname{tg} x$ ауыстыруын жасаймыз:

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + 3\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}, \\ \sin x \cos x = \dfrac{t}{1+t^2}, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{2t^2 - 2t + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - t + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{5}} + C. \quad ◄$$

$$\textbf{9.}\quad \int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}\,dx.$$

► Мұнда § 7.3 (6) – түрдегі интегралдау а) жағдайы: $n = 3, \quad m = -\dfrac{1}{5}.$

$$\int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin 4x = t, \\ dt = 4\cos 4x dx \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1 - t^2\right)dt}{\sqrt[5]{t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(t^{-\frac{1}{5}} - t^{\frac{9}{5}} \right) dt = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} t^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{14} t^{\frac{14}{5}} \right) + C =$$

$$= \frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^4 4x} - \frac{5}{56}\sqrt[5]{\sin^{14} 4x} + C. \quad ◄$$

8. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

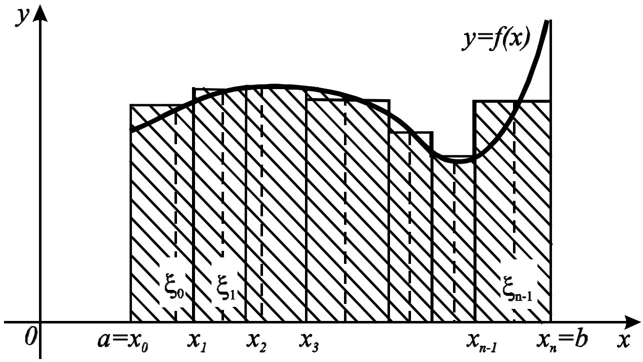
§ 8.1. Анықталған интеграл ұғымына әкелетін есептер. Анықталған интеграл және оның қасиеттері

8.1.1. Геометриялық және физикалық есептер. Анықталған интеграл анықтамасы

I-есеп. $[a,b]$ кесіндісінде (a мен b – ақырлы сандар) үзіліссіз $f(x) \geq 0$ функциясы берілсін.

А) « $y = f(x)$ қисығымен, Ox өсімен және $x = a,$ $x = b$ түзулерімен шенелген фигураның ***ауданы*»** деген ұғымды анықтау керек (67-сурет);

Ә) ***осы S ауданды табу керек***.



67-сурет

▼ Есепте аталған фигураны **қисықсызықты трапеция** дейді. Бұл есепті шығару үшін келесі амалдарды орындаймыз:

а) $[a,b]$ кесіндіні **кез келген** $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ нүктелермен n бөлікке бөлеміз:

$$[a,b] = [x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}; x_n] = \bigcup_{j=0}^{n-1} [x_j; x_{j+1}].$$

б) әрбір $[x_j;x_{j+1}]$ бөлікше кесіндіден **кез келген** ξ_j нүктесін аламыз $\xi_j \in [x_j;x_{j+1}]$, $j=0,1,...,n-1,$ және осы нүктелерге сәйкес $f(\xi_j)$ функция мәндерін тауып, келесі қосындыны құрамыз:

$$S_n = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j, \qquad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j .$$

Алынған өрнек $f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндідегі **интегралдық қосындысы** деп аталады. Оның әрбір қосылғышы:

$$f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = f(\xi_j)\Delta x_j, \quad j = 0,1,...,n-1,$$

– табаны $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, биіктігі $f(\xi_j)$ болатын тік төртбұрыш ауданына тең, ал S_n саны қисықсызықты трапеция ауданына белгілі бір дәлдікпен жуықтайды: $S_n \approx S$. Бұл жуық теңдік дәлірек болуы үшін **барлық** $[x_j;x_{j+1}]$, $j=0,1,...,n-1$, бөлікше кесінділерді мейлінше ұсақтай түсу керек екені түсінікті;

в) Ұзындығы ең үлкен бөлікше кесіндіні нөлге ұмтылдырып $\max\limits_{j=0,1,\cdots,n-1} \Delta x_j \to 0$ (онда барлық Δx_j нөлге ұмтылады) S_n қосындының шегін аламыз:

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j . \qquad (1)$$

Мұндағы S саны қисықсызықты трапецияның **ауданы** деп аталады:

Сонымен I-есептің екі сұрағына да жауап алдық. ▲

II-есеп. x өсіндегі $[a,b]$ кесіндісін – сызықтық біртекті емес стержень (желі) ретінде қарастырайық . Оның массасының үлестіру тығыздығы $\rho(x)$ – үзіліссіз функция болсын. Осы стерженьнің массасын анықтау керек.

▼ **а)** Стерженьді ***кез келген*** $a = x_0 < x_1 < ..., < x_n = b$ нүктелерімен n бөлікке бөліктейміз: $[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1}[x_j; x_{j+1}]$;

б) Әрбір $[x_j; x_{j+1}]$ бөліктен <u>кез келген</u> ξ_j нүктесін $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = 0,1,...,n-1$ алып, келесі интегралдық қосындыны құраймыз: $\mathrm{M}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \rho(\xi_j)\Delta x_j$. Ал $[x_j; x_{j+1}]$ аралығында $\rho(x)$ функциясының өзгеруі шамалы ғана болатындықтан, стерженьнің $[x_j; x_{j+1}]$ кесіндісіне сәйкес массасының жуық мәні $\rho(\xi_j)\cdot\Delta x_j = \rho(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$ тең болғандықтан, M_n қосындысы бүкіл стерженнің массасын жуықтайды;

в) Стерженьнің массасының дәл мәнін, ұзындығы ең үлкен бөлікше кесіндіні нөлге ұмтылдыра отырып, M_n интегралдық қосындының шегіне өту арқылы аламыз:

$$\mathrm{M} = \lim_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ i=1,...,n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(\xi_j)\Delta x_j\,,\ \ \Delta x_j = x_{j+1} - x_j\,. \qquad (2)$$ ▲

Осы сияқты, қандай да бір дене f күшінің әсерінен $[a;b]$ аралығында түзу сызықпен қозғалғандағы A жұмысын анықтауға болады: $A = \lim_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=1,...,n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j$.

Тағы да басқа көптеген физикалық есептерді осы тәсілмен шешуге болады.

Бұл есептер бізді $[a;b]$ кесіндісінде берілген, тегі әртүрлі функцияларға жасалатын бір ғана математикалық амалға алып келіп отыр. Бұл амал **функцияны кесіндіде интегралдау** деп, ал оның нәтижесі **функцияның кесіндідегі анықталған интегралы** деп аталады. Енді жалпы жағдайға көшейік, **І-есеп**тегі үзіліссіз және теріс емес функцияға жасалған үш амалды сипаты кез келген функция үшін қайталайық.

$[a;b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясы берілсін.

а) $[a;b]$ кесіндісін ***кез келген*** $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нүктелерімен $[x_j, x_{j+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, бөліктерге бөлеміз (оны R бөліктеуі деп атайық);

б) Әрбір $[x_j; x_{j+1}]$ бөліктен ***кез келген*** $\xi_j \in [x_j; x_{j+1}]$ нүктелерін алып, f ***функциясының R бөліктеуіне сәйкес интегралдық қосынды*** деп аталатын

$$S_R(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j\,, \quad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j$$

қосындыны құрамыз;

в) $\max\limits_{j=0,1,\ldots,n-1} \Delta x_j \to 0$ ұмтылдырып, интегралдық қосындының шегіне өтеміз.

Егер бұл ***шек бар болса***, онда ол f ***функциясының*** $[a;b]$ ***кесіндісіндегі Риман бойынша анықталған интегралы*** деп аталады да**,**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=0,\ldots,n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j\,, \quad (a < b) \tag{3}$$

түрінде белгіленеді. Мұндағы a мен b сандары – анықталған интегралдың сәйкес ***төменгі*** және ***жоғарғы шегі*** деп аталады.

Назар аударыңыз. Анықтамада айтылған $[a;b]$ кесіндісін бөліктеуді де, ξ нүктесін таңдап алуды да ақырсыз көп тәсілдермен жасауға болады. Егер f функциясының интегралдық қосындысының шегі бар болса, онда ол осы тәсілдерге тәуелсіз (кез келген R бөліктеу мен ξ нүктелері үшін) бір санға ғана тең болуы керек. Бұл жағдай, әрине, f функциясының сипатына байланысты. Мысалы, егер f функциясы $[a;b]$ кесіндісінде ***үзіліссіз*** немесе ***монотонды*** болса, онда ***оның интегралдық қосындысының шегі бар.***

Жоғарыдағы анықтаманы үзіліссіз функциялар үшін француз математигі О.Л.Коши (1789-1857), ал жалпы жағдай үшін неміс математигі Б.Ф. Риман (1826-1866) енгізген.

(3) шек ***Риман интегралы,*** ал $f(x)$ функциясы ***Риман мағынасында интегралданатын функция*** деп аталады. Біз алдымызда, Риман интегралын тек интеграл деп атайтын боламыз.

(1)-(3) теңдіктерден мынадай қорытынды жасауға болады:

1) $y = f(x) \geq 0$ қисығымен, Ox өсімен, $x = a$, $x = b$ түзулерімен шенелген жазық фигураның S ауданы $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралына тең: $S = \int_a^b f(x)dx$;

2) Ox өсінің $[a;b]$ кесіндісі бойымен орналасқан үлестіру тығыздығы $\rho(x)$ тең, біртекті емес стерженнің M массасы осы $\rho(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралына тең: $\mathrm{M} = \int_a^b \rho(x)dx$.

3) Қандай да бір дене f күшінің әсерінен $[a;b]$ аралығында түзу сызықпен қозғалғандағы A жұмысы, f функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралына тең: $A = \int_a^b f(x)dx.$

Анықталған интегралды оның анықтамасы арқылы есептеу оңай жұмыс емес. Сондықтан анықталған интегралды есептеудің басқа тәсілін табу қажет болды. Бұл бағытта ағылшын физигі И.Ньютон (1643-1723) және неміс математигі Г.В.Лейбниц (1646-1716) шешуші жұмыс атқарды. Олар математикалық анализдің маңызды ұғымдары – интеграл мен туындыны байланыстыратын теореманы дәлелдеді. Оның түйіні мынау: егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, ал $F(x)$ оның осы кесіндідегі қандай да бір алғашқы функциясы ($F'(x)=f(x)$) болса, онда ***Ньютон-Лейбниц формуласы*** деп аталатын келесі теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Жоғарыда ескерткеніміздей, $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз функцияның интегралданатын функция болатындығын пайдаланып (4) формуланы дәлелдеу қиын емес.

▼ Шынында да, бұл жағдайда $[a;b]$ кесіндісіне кез келген R бөліктеуін $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ жасап, одан соң

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n+1}) - ... -$$

$$-F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[F(x_{k+1}) - F(x_k)\right] = \Big| \quad [x_k, x_{k+1}]$$

кесіндісінде үзіліссіз $F(x)$ функциясына Лагранж теоремасын қолданамыз $\Big| = \sum_{k=0}^{n-1} F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$

аламыз. Бұл теңдіктен $\max\limits_{i=0,...,n-1} \Delta x_j \to 0$ ұмтылдырып шекке өтсек, теңдіктің сол жақ бөлігі тұрақты санның шегі, ал оң жақ бөлігінің шегі бар (жоғарыдағы ұйғарым бойынша) және ол $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралына тең болады, яғни (4) теңдікті аламыз. ▲

Мысалы, $\int\limits_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

Дәлелдеусіз келесі теореманы келтіреміз (оны да, мысалы, [2] кітаптан қарауға болады).

Теорема. $[a;b]$ *кесіндісінде* ***шенелмеген*** *функция осы кесіндіде (Риман бойынша) интегралданбайды*.

Ендеше, $[a;b]$ ***кесіндісінде интегралданатын функция осы кесіндіде шенелген*** ($A \Rightarrow B \iff \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ контрапозиция заңы). Бірақ, бұған кері тұжырым дұрыс емес, яғни ***функцияның*** $[a;b]$ ***кесіндісінде шенелгендігі оның осы кесіндіде интегралдануына жеткіліксіз.***

Мысалы, $\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ рационал болса}, \\ -1, & \text{егер } x \text{ иррационал болса} \end{cases}$

функциясы кез келген $[a;b]$ кесіндісінде *шенелген*: $|\psi(x)|=1$. Бірақ ол $[a;b]$ кесіндісінде ***Риман мағынасында*** *интегралданбайды.* Шынында да, $\psi(x)$ функциясының интегралдық қосындысындағы ξ_j нүктелерін рационал сандар етіп таңдасақ, онда $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi(\xi_j)\Delta x_j=\sum\limits_{i=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_j=b-a$; ал ξ_j нүктелерін иррационал сандар етіп таңдасақ, онда $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi(\xi_j)\Delta x_j=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)\cdot\Delta x_j=$

$=-(b-a)=a-b$ алар едік. Яғни интегралдық қосындының шегі, ξ_j нүктелерін алу тәсіліне тәуелді әртүрлі сандар болады екен. Демек, ψ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданбайды.

Сонымен, *функция берілген кесіндіде Риман бойынша* ***интегралдануы үшін*** *оның осы кесіндіде* ***шенелген*** *болуы* ***қажет*** **!**

8.1.2. Анықталған интегралдардың қасиеттері.

1°. Егер $\forall x\in[a;b]$, $f(x)\equiv 1$ болса, онда

$$\int_a^b dx=b-a. \tag{5}$$

Шынында да, $[a,b]$ кесіндісінің кез келген R бөліктеуі үшін

$$\delta_R=\sum_{j=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_j=\sum_{j=0}^{n-1}(x_{j+1}-x_j)=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots$$

$$\ldots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_0=b-a.$$

2°. Егер $[a;b]$ кесіндісінде f және g интегралданатын функциялар, ал A, B кез келген сандар болса, онда

$$\int_a^b[A\cdot f(x)+B\cdot g(x)]dx=A\int_a^b f(x)dx+B\int_a^b g(x)dx. \tag{6}$$

▼ Кез келген R бөліктеуі үшін

$$\sum_{i=0}^{n-1}[A\cdot f(\xi_j)+B\cdot g(\xi_j)]\Delta x_j=A\cdot\sum_{j=0}^{n-1}f(\xi_j)\Delta x_j+B\sum_{i=0}^{n-1}g(\xi_j)\Delta x_j$$

теңдігі орындалады. Бұдан $\max\limits_{i=0,\dots,n-1}\Delta x_j \to 0$ ұмтылдырып шекке өтсек, (6) теңдікті аламыз. (6) теңдіктің $b \le a$ үшін де дұрыс екенін байқауға болады. ▲

Дербес жағдайда, $B=0$ болса, онда

$$\int_a^b A\cdot f(x)dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \tag{7}$$

ал $A=1,\ B=1$ болса, онда

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,. \tag{8}$$

Ескерту. Егер $f(x),\ g(x)$ функциялары $[a;b]$ кесіндісінде иинтегралданатын болса, онда $f(x)\cdot g(x)$ көбейтіндісі де осы кесіндіде интегралданады. Бірақ көбейтіндінің интегралы көбейткіштердің интегралдарының көбейтіндісіне тең бола бермейді:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \ \neq \ \int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx\,.$$

Мысалы, $f(x)=x,\ \ g(x)=x^2,\ \ [a;b]=[0{,}1]$ деп алып, (4)-формуланы пайдалана отырып, осы айтылғанға көз жеткізіңіз.

Анықтама бойынша *a* нүктесінде берілген кез келген f функциясы үшін

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,, \tag{9}$$

ал $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын f функциясы үшін

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,,\quad b<a \tag{10}$$

деп аламыз. Бұл теңдіктерді геометриялық тұрғыдан көру қиын емес. Шынында да, бірінші жағдайда қисық сызықты трапеция $[0, f(a)]$ кесіндісіне айналады да, оның ауданы нөлге тең болады; екінші жағдайда кесіндіні бөліктеу нүктелері үшін $a = x_0 > x_1 > ... > x_{n-1} > x_n = b$ орындалады $(b < a)$ және әрбір Δx_j үшін $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j < 0$, $i = 0,1,...,n-1$ болатынын ескеру керек.

3°. (*анықталған интегралдың аддитивтік қасиеті*). Егер кез келген a,b,c сандары үшін әрбір $[a;b]$ $[a,c]$ және $[c,b]$ кесінділерінде f интегралданатын функция болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{11}$$

теңдігі орындалады.

▼ **1)** $a < c < b$ болсын. $[a;b]$ кесіндісін c нүктесі бөліктеу нүктесі $c = x_m$ болатындай етіп, R бөліктеуін жасайық:

$R: \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_m = c < ... < x_n = b.$

Осы R бөліктеуінен $[a,c]$ мен $[c,b]$ кесінділерінің

$$R_1: \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_m = c$$

$$R_2: \quad c = x_m < x_{m+1} < ... < x_n = b$$

бөліктеулері пайда болады. Олай болса

$$\delta_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j = \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{j=m}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j = \delta_{R_1} + \delta_{R_2}.$$

Бұдан $\lim\limits_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=0,...,n-1}} \delta_R = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=0,...,m-1}} \delta_{R_1} + \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=m,...,n-1}} \delta_{R_2}$ теңдігін жаза аламыз.

3° қасиеттің шарты бойынша бұл үш шектің үшеуі де бар, сондықтан соңғы теңдік (11) теңдік түрінде жазылады.

2) $a < b < c$ болсын. Онда (11) теңдік бойынша

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, ал бұдан (10) теңдікті ескеріп,

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ аламыз.

a,b,c нүктелерінің қалған жағдайлары да осы сияқты дәлелденеді. ▲

Ескерту. 3^o қасиеттің орындалуы үшін $f(x)$ функциясы $[a;b]$, $[a,c]$, $[c,b]$ кесінділерінің ең үлкенінде интегралдануы жеткілікті.

4º. Егер $[a,b]$ кесіндісінде *f*, *g* интегралданатын функциялар болса және $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \le g(x)$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx\,, \quad a \le b. \qquad (12)$$

▼ Кез келген *R* бөліктеуі үшін $\Delta x_j \ge 0$ екенін ескеріп,

$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j \le \sum_{j=0}^{n-1} g(\xi_j)\Delta x_j$ аламыз. Бұл теіңсіздіктен $\max \Delta x_j \to 0$ ұмтылдырып (12)-теңсіздікті аламыз. ▲

Дербес жағдайда, егер f теріс емес, $[a;b]$ кесіндісінде интегралданатын функция болса, онда $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b 0dx = 0$, $a \le b$, яғни $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \ge 0$ үшін

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0\,, \ a \le b. \qquad (13)$$

5º. Егер *f*, $|f|$ функцилары $[a;b]$ кесіндісінде интеграл-данатын болса, онда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|. \qquad (14)$$

▼ $\forall x \in [a,b]$ нүктелері үшін $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ теңсіз-діктері орындалатыны айқын. Бұдан (12) және (7) қатыстарды пайдаланып,

$$\int_a^b \left[-|f(x)|\right]dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx\,, \quad a \le b,$$

немесе $$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad a \le b,$$

яғни $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|, \; a \le b,$$ аламыз.

Егер $a > b$ болса, онда осы соңғы теңсіздік пен (10) теңдікті пайдаланамыз:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|-\int_b^a f(x)dx\right| = \left|\int_b^a f(x)dx\right| \le \left|\int_b^a |f(x)|dx\right| =$$

$$= \left|-\int_a^b |f(x)|dx\right| = \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

аламыз. ▲

Дәлелдеу барысында алынған

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad a \le b. \tag{14'}$$

теңсіздігі, математикада жиі пайдаланылады.

Бұл теңсіздікті (13) және (14) теңсіздіктерден де алуға болатынына назарыңызды аударамыз.

Ескерту. Егер f функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданса, онда $|f|$ функциясы да осы кесіндіде интегралданады ([2] қараңыз). Бірақ, керісінше, $|f|$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданса, f функциясы да осы кесіндіде интегралданады деп айта алмаймыз.

Мысалы, жоғарыда $\psi(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рационал}, \\ \text{-}1, & x - \text{иррационал} \end{cases}$

функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданбайтынын көрсеткен едік. Ал $|\psi(x)| \equiv 1$, $x \in [a;b]$, функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданады.

1-теорема. Кесіндінің бір нүктесінен басқа нүктелерінде нөлге тең функцияның осы кесіндідегі анықталған интегралы нөлге тең. Басқаша айтқанда,

$$\psi_c(x)=\begin{cases}0, & x\in[a;b]\setminus\{c\}\\ A, & x=c\end{cases}\tag{15}$$

функциясы үшін келесі теңдік орындалады:

$$\int_a^b \psi_c(x)dx=0.\tag{16}$$

▼ $[a;b]$ кесіндісіне кез келген R бөліктеуін жасайық R: $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. Ал c нүктесі осы бөліктердің біреуінің, айталық, $[x_m,x_{m+1})$ бөлігінің ішінде жатсын ($x_m\le c<x_{m+1}$). Онда

$$\delta_R=\sum_{j=0}^{n-1}\psi_c\left(\xi_j\right)\Delta x_j=\psi_c\left(\xi_{m-1}\right)\Delta x_{m-1}+\psi_c\left(\xi_m\right)\Delta x_m.$$

$\forall x\in[a,b]$ нүктелері үшін $|\psi_c(x)|\le|A|$ болатындықтан,

$$|\delta_R|=|\psi_c(\xi_{m-1})\Delta x_{m-1}+(\psi_c(\xi_m)\Delta x_m|\le$$

$$\le\quad \left|\Delta x_j>0 \text{ ескерсек}\right| \quad\le\quad |\psi_c(\xi_{m-1})|\cdot\Delta x_{m-1}+$$

$$+\ |\psi_c(\xi_m)|\Delta x_m\le\ |A|\cdot(\Delta x_{m-1}+\Delta x_m)\ \to\ |A|\cdot 0,\quad \max_{j=0,...,n-1}\Delta x_j\to 0,$$

яғни (16) теңдік орындалады. ▲

Салдар. $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын f функциясының $c\in[a,b]$ нүктесіндігі мәнін өзгерткеннен оның анықталған интегралы өзгермейді, яғни оның $c\in[a;b]$ нүктесіндігі мәнін өзгерткеннен кейін алынған f_1 функциясы үшін $\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ теңдігі орындалады.

▼ f функциясын жалғыз c нүктесінде өзгерту, оған $\psi_c(x)$ функциясын ((15)-қараңыз) қосу деген сөз: $f_1(x)=f(x)+\psi_c(x)$. Олай болса осы теңдіктен (8) және (16) теңдіктерін ескеріп,

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \psi_c(x)dx = \int_a^b f(x)dx + 0$$

аламыз. ▲

Салдардан, f функциясының интегралдануы оның белгілі бір нүктеде қандай мән қабылдайтынына тәуелді емес екенін көреміз. Мысалы, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ және $g(x) = 1$ функцияларының әртүрлі мәндері тек $x = 0$ нүктесінде ғана. Олай болса,салдар бойынша, кез келген $[a;b]$ кесіндісінде $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a$ аламыз.

2-теорема. f функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданатын теріс емес функция болсын. Егер f функциясы $c \in [a;b]$ нүктесінде үзіліссіз және $f(c) > 0$ болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx > 0\,, \quad a < b. \tag{17}$$

▼ $c \in [a,b]$ деп алайық. Онда

$$f(x) > \frac{f(c)}{2}, \quad \forall x \in [c - \delta,\ c + \delta], \tag{18}$$

орындалатын $[c - \delta, c + \delta]$ кесіндісі табылатынын көрсетейік.

Шынында да, f функциясы c нүктесінде үзіліссіз болғандықтан, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, басқаша айтқанда, $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$ саны арқылы $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > \left| f(c) - f(x) \right|$, $\forall x \in [c - \delta, c + \delta]$ немесе $f(c) - \frac{f(c)}{2} < f(x) < f(c) + \frac{f(c)}{2}$, $\forall x \in [c - \delta, c + \delta]$ орындалатындай $[c - \delta,\ c + \delta]$ кесіндісі табылады. Бұл теңсіздіктердің сол жақ бөлігі

(18) теңсіздікті береді. Онда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx +$ $+ \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$ қосындысындағы қосылғыштар үшін

$$\int_a^{c-\delta} f(x)dx \geq 0, \quad \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx \geq 0,$$

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx > \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}dx = \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta = f(c) \cdot \delta > 0$$

теңсіздіктері орындалатындықтан, $\int_a^b f(x)dx > 0$ аламыз.

Егер $c = a$ немесе $c = b$ болса, онда $[c-\delta, c+\delta]$ кесіндісінің орнына сәйкес $[a, a+\delta]$, $[b-\delta, b]$ кесінділері алынады. ▲

8.1.3. Интегралдың жоғарғы шегі арқылы туынды алу

f функциясының интегралдық қосындысы $\delta_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j$ түрінде жазылатындықтан, интегралдау айнымалысын кез келген әріппен белгілеуге болады: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$.

Біз төменде интегралдау айнымалысын, оқырманға түсінікті болу үшін, ыңғайлы әріппен алмастырып отыратын боламыз. $[a;b]$ кесіндісінде f интегралданатын функция болсын. Онда ол кез келген $x \in [a;b]$ нүктесі үшін $[a, x]$ кесіндісінде де интегралданады. *Мысалы*, $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз немесе монотонды функция $[a, x] \subset [a;b]$ кесіндісінде де сәйкес үзіліссіз немесе монотонды, демек, интегралданады.

Әрбір $x \in [a;b]$ санына анықталған $\int_a^x f(u)du$ мәні сәйкес келетіндіктен, келесі функция

$$F(x)=\int_a^x f(u)du \qquad (1)$$

интегралдың жоғарғы шегіне тәуелді.

1-теорема. Егер $[a;b]$ кесіндісінде f функциясы интегралданса, онда $F(x)=\int_a^x f(u)du$ функциясы кез келген $x\in[a;b]$ нүктесінде үзіліссіз.

▼ Кез келген $x\in[a;b]$ нүктесін алып, оған h өсімше берейік. Онда интегралданатын функцияның $[a;b]$ кесіндісінде шенелгендігін пайдаланып,

$$\left|F(x+h)-F(x)\right|=\left|\int_a^{x+h} f(u)du-\int_a^x f(u)du\right|=$$

$$=\left|\int_a^x f(u)du+\int_x^{x+h} f(u)du-\int_a^x f(u)du\right|=\left|\int_x^{x+h} f(u)du\right|\le$$

$$\le\int_x^{x+h}\left|f(u)\right|du\le M\cdot\int_x^{x+h} du=M\cdot h,\quad a\le b,$$

аламыз. Бұл теңсіздіктен $\lim\limits_{h\to 0}[F(x+h)-F(x)]=0$, яғни F функциясының x нүктесінде үзіліссіздігін аламыз. ▲

Мұнда x ***нүктесінде*** f ***үзілісті функция болса да,*** $F(x)$ ***функциясы осы*** x ***нүктесінде үзіліссіз болатынына оқушының назарын аударамыз!***

2-теорема. Егер $[a;b]$ кесіндісінде f функциясы интеграл-данса және $x_0\in[a;b]$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы x_0 нүктесінде $F'(x_0)$ туындысы бар және келесі теңдік орындалады:

$$F'(x_0)=\left[\int_a^x f(u)du\right]'\Bigg|_{x=x_0}=f(x_0). \qquad (2)$$

▼ Алдымен, f функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіздігінен

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left[f(u)-f(x_0)\right]du=0 \qquad (3)$$

шығатынын көрсетейік. Шынында да, f функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болғандықтан $\lim\limits_{u\to x_0} f(u)=f(x_0)$, яғни, $\forall\varepsilon>0$ саны арқылы барлық $u\in[x_0;x_0+h]$ үшін $|h|<\delta$ болса, $|f(u)-f(x_0)|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай δ саны табылады. Сондықтан $|h|<\delta$ үшін

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(u)-f(x_0)]du\right|\le\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(u)-f(x_0)|du\right|\le\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon du\right|=\left|\frac{1}{h}\cdot\varepsilon h\right|=\varepsilon$$

орындалады, яғни (3) теңдікті аламыз.

Енді (3) теңдікке сүйеніп, (2) теңдікті алуға болады:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h}f(u)du-\int_a^{x_0}f(u)du\right]=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(u)du=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left\{f(x_0)+\left[f(u)-f(x_0)\right]\right\}du=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(x_0)du+\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left[f(u)-f(x_0)\right]du.$$

Интегралдау айнымалысы u, ал $f(x)$ осы u-ға тәуелсіз болғандықтан, ол тұрақты сан рөлін атқарады да,

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(x_0)du=\frac{1}{h}f(x_0)\cdot u\Big|_x^{x+h}=\frac{1}{h}f(x_0)\cdot h=f(x_0)$$

болады. Олай болса жоғарғы теңдік келесі түрде жазылады:
$\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)+\dfrac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\left[f(u)-f(x_0)\right]du$. Енді (3) ескерсек,

онда $F'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0),$ яғни (2) теңдікті аламыз. ▲

Ескерту: $\Phi(x)=\int\limits_x^b f(u)du,\ a\le x\le b$ функциясы үшін де 1 және

2-теоремалар дұрыс: $\Phi(x)=\int\limits_x^b f(u)du=\int\limits_a^b f(u)du-\int\limits_a^x f(u)du=$

$=\int\limits_a^b f(u)du-F(x),$ ал тұрақты мен үзіліссіз функциялардың

айырымы үзіліссіз функция. Бұдан 2-теорема бойынша, $x_0\in[a;b]$

нүктесі үшін $\Phi'(x_0)=\left.\left(\int\limits_a^b f(u)du-F(x)\right)'\right|_{x=x_0}=-F'(x_0)=-f(x_0),$ яғни

$$\left.\left(\int\limits_x^b f(u)du\right)'\right|_{x=x_0}=-f(x_0). \qquad (2')$$

(2) теңдікті жалпылауға болады: егер R нүктелерінде f үзіліссіз, ал φ мен ψ дифференциалданатын функциялар болса, онда

$$\left(\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(u)du\right)'=f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)-f\left(\psi(x)\right)\cdot\psi'(x). \qquad (2'')$$

2-теоремадан келесі маңызды тұжырымды аламыз.

$[a;b]$ ***кесіндісінде үзіліссіз*** $f(x)$ ***функциясының осы кесіндіде алғашқы ф сы бар*** және оның алғашқы функцияның бірі ретінде $F(x)=\int\limits_a^x f(u)du$ функциясын алуға болады:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(u)du + C, \quad x \in [a;b]. \tag{4}$$

Зер салыңыз! Келесі екі тұжырым пара-пар емес:

1) Функцияның Δ аралығында алғашқы функциясы бар;

2) функция Δ аралығында интегралданады.

Мысалы, $f(x) = signx$ функциясы $\Delta = [-1;1]$ кесіндісінде ***интегралданады***, бірақ оның осы кесіндіде ***алғашқы функциясы жоқ***. Сонымен бірге, берілен кесіндіде ***алғашқы функциясы бар***, бірақ онда Риман бойынша ***интегралданбайтын*** функция бар (төмендегі 3-мысалдан кейінгі ескертуге де зер салыңыз!).

8.1.4. Ньютон-Лейбниц формуласының анықталған интегралдарды есептеуге қолданылуы.

Егер $[a;b]$ кесіндісінде f үзіліссіз функция, ал $\Phi(u)$ оның осы кесіндідегі қандай да бір алғашқы функциясы болса, онда

$$\int_a^b f(u)du = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b . \tag{1}$$

(1) теңдік ***Ньютон-Лейбниц формуласы*** деп аталатын еді. Оны басқа тәсілмен де дәлелдеуге болатынын көрсетейік:

▼ $F(x) = \int_a^x f(u)du$, $x \in [a;b]$ функциясы f функциясының алғашқы функциясы болғандықтан келесі теңдік орындалады

$$\Phi(x) = F(x) + C. \tag{2}$$

Енді $F(a) = \int_a^a f(u)du = 0$ теңдігін ескерсек, онда

$$\Phi(b) - \Phi(a) \overset{(2)}{=} [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a) =$$

$$= \int_a^b f(u)du - \int_a^a f(u)du = \int_a^b f(u)du ,$$

яғни (1) теңдікті аламыз. ▲

1-мысал. $\int\limits_1^2 (2\sqrt{x}-3)dx = 2\int\limits_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx - 3\int\limits_1^2 dx = 2\cdot\left.\frac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_1^2 - 3x\Big|_1^2 =$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt{8}-1) - 3(2-1) = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1) - 3\ ;$$

2-мысал.

$$\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx = \int\limits_0^{\pi}\sqrt{\cos^2}dx = \int\limits_0^{\pi}|\cos x|dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx =$$

$$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = 1+1 = 2\ ;$$

Функцияның берілген аралықта алғашқы функциясы болмаса, Ньютон-Лейбниц формуласын пайдалана алмаймыз. Онда басқа тәсілдерге көшуге мәжбүрміз. Сондай тәсілдердің бірін келесі мысалмен көрсетейік.

3-мысал. Теңдікті дәлелдеу керек:

$$G(x) = \int\limits_{-1}^{x} sign(u)\ du = |x| - 1, \quad x \in [-1,1]. \tag{3}$$

▼ Мұндағы $signx = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$ функциясы $x = 0$ нүктесінен басқа нүктелерде үзіліссіз. Ал $x \in [-1,0)$ нүктелері үшін $signx = -1$ үзіліссіз функция, сондықтан $[-1;0)$ жартылай аралы-ғына (1) формуланы қолдана аламыз:

$$G(x) = \int\limits_{-1}^{x} signudu = \int\limits_{-1}^{x}(-1)du = -u\Big|_{-1}^{x} = -x-1\,,\ -1 \le x < 0. \tag{4}$$

Берілген $[-1,1]$ кесіндісінде $signx$ функциясы монотонды және шенелген, демек, ол осы кесіндіде интегралданатын функция (8.1,1-ескертуді қараңыз). Олай болса, 1-теорема бойынша $G(x)$ функциясы

$[-1,1]$ кесіндісінде үзіліссіз. Сондықтан $x=0$ нүктесі үшін

$$G(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} G(x)=\lim_{x\to 0-}\int_{-1}^{x}(-1)du=\lim_{x\to 0-}(-1-x)=-1, \qquad (5)$$

яғни $G(0)=\int_{-1}^{0} signudu = 0-1.$

Енді $x\in(0,+1]$ нүктелері үшін есептейміз:

$$G(x)=\int_{-1}^{x} signudu=\int_{-1}^{0} signudu+\int_{0}^{x} signudu=-1+\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}}\int_{a}^{x}1du=$$

$$=-1+\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}}(x-a)=x-1, \quad 0<x\le 1. \qquad (6)$$

(4) – (6) теңдіктерден (3) теңдік шығады. ▲

Теорема (*анализдің негізгі теоремасы*). Егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданып, $F(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, сонымен бірге осы кесіндінің ең болмағанда ақырлы санды нүктелерінен басқа нүктелерінде оның $f(x)$-ке тең туындысы бар болса, онда келесі теңдік орындалады: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$

Мысалы, $F(x)=|x|$ функциясы $[-1,1]$ кесіндісінде үзіліссіз және $x\neq 0$ нүктелерінде $|x|'=signx.$ Олай болса, *анализдің негізгі теоремасы* бойынша, $G(x)=\int_{-1}^{x} sign(u)\; du=|u|\big|_{-1}^{x}=|x|-1$ аламыз.

1-теорема (*айнымал ауыстыру*). Егер $x=\varphi(t)$ функциясы $[c,d]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын және $a=\varphi(c)$, $b=\varphi(d)$, сонымен бірге $\varphi([c,d])=[a;b]$ кесіндісінде $f(x)$ үзіліссіз функция болса, онда келесі теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (7)$$

▼ $F(x)$ және $\Phi(t)$ сәйкес $f(x)$ және $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ функ-цияларының алғашқы функциялары болсын. Онда $F'_t[\varphi(t)] = F'_\varphi \cdot \varphi'_t(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, ал бұдан $\Phi(t) = F[\varphi(t)] + C.$ Олай болса,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F[\varphi(d)] - F[\varphi(c)] = \Phi(d) - \Phi(c) = \int_c^d f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

▲

1-мысал. $$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t, \quad dx = a\cos t dt \\ x_1 = 0, \ t_1 = 0 \\ x_2 = a, \ t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Келесі теңдіктер анықталған интегралды есептеуде жиі пайдаланылады:

1) Егер f жұп функция болса $(f(-u) = f(u))$, онда

$$\int_{-a}^a f(u)du = 2\int_0^a f(u)du. \qquad (8)$$

2) Егер f тақ функция болса $(f(-u) = -f(u))$, онда

$$\int_{-a}^a f(u)du = 0. \qquad (9)$$

3) Егер f функциясы $2l$ периодты болса, онда

$$\int_0^{2l} f(x)dx = \int_a^{2l+a} f(x)dx. \qquad (10)$$

▼ **1)** $\int\limits_{-a}^{a} f(u)du = \int\limits_{-a}^{0} f(u)du + \int\limits_{0}^{a} f(u)du = \begin{vmatrix} u=-x & du=-dx \\ u_1=-a, & x_1=a \\ u_2=0, & x_2=0 \end{vmatrix} =$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(u)du = \left| f(-x) = f(x) \right| = -\int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(u)du =$$

$$= \int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(u)du = 2\int\limits_{0}^{a} f(u)du.$$

(9) теңдік те осындай айнымал ауыстыру арқылы дәлелденеді;

(10) теңдікті дәлелдейік:

$$\int\limits_{a}^{2l+a} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{2l} f(x)dx + \int\limits_{2l}^{2l+a} f(x)dx. \qquad (11)$$

Үшінші қосылғыштағы интегралға $x = u + 2l$ ауыстыруын жасайық. Онда $x_1 = 2l,\ \ u_1 = 0;\ \ x_2 = 2l + a,\ \ u_2 = a$ және $dx = du$ болады да, $\int\limits_{2l}^{2l+a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(u+2l)du = \int\limits_{0}^{a} f(u)du = -\int\limits_{a}^{0} f(u)du$ аламыз. Бұл өрнекті (11) теңдіктің оң жағындағы үшінші қосылғыш орнына қойсақ, (10) теңдікті аламыз: $\int\limits_{2l}^{2l+a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{2l} f(x)dx - -\int\limits_{a}^{0} f(u)du = \int\limits_{0}^{2l} f(x)dx.$ ▲

2-мысал. $\int\limits_{-2}^{2} (2x^7 + x^5)|x|\cos 9x\, dx = 0$, өйткені тақ функция мен жұп функция көбейтіндісі тақ функция болатыны бізге белгілі. $(2x^7 + x^5)$-тақ, ал $\cos 9x \cdot |x|$ – жұп функция (тексеріңіз). Олай болса, (9) теңдік бойынша тақ функцияның симметриялы [-2; 2] кесіндісіндегі интегралы нөлге тең.

3-мысал.

$$\int_0^{4\pi}\sin^7 x\cdot dx=\int_0^{2\pi}\sin^7 x\cdot dx+\int_{0+2\pi}^{2\pi+2\pi}\sin^7 x\cdot dx=\int_0^{2\pi}\sin^7 x\cdot dx+\int_0^{2\pi}\sin^7 x\cdot dx=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sin^7 x\cdot dx=2\int_{0-\pi}^{2\pi-\pi}\sin^7 x\cdot dx=2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^7 x\cdot dx=0.$$

2-теорема. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $u(x)$, $v(x)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болса, онда ***бөліктеп интегралдау формуласы*** деп аталатын мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx\ . \tag{12}$$

▼ $u(x)v(x)$ көбейтіндісінің $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз туындысы бар $(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. Олай болса Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша $\int_a^b[u(x)\cdot v(x)]'dx=\ =\int_a^b[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx$ немесе $u(x)v(x)\Big|_a^b=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\ +\int_a^b u(x)v'(x)dx$, ал бұдан (12) теңдікті аламыз. ▲

4-мысал. Есептеу керек: $\int_0^1\ln(1+x)dx.$

$$\int_0^1\ln(1+x)dx=\begin{vmatrix}u=\ln(1+x) & dv=dx\\ du=\dfrac{1}{1+x}dx & v=x\end{vmatrix}=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=$$

$$=\ln 2-\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx=\ln 2-\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\ln 2-x\Big|_0^1+\ln(1+x)\Big|_0^1=$$

$$=\ln 2-1+\ln 2-\ln 1=2\ln 2-1=\ln 4-1.$$

3-теорема (***орта мән туралы***). $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы үшін

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\,, \qquad \xi\in[a;b], \tag{13}$$

теңдігі орындалатындай $\xi\in(a,b)$ нүктесі табылады.

Бұл теңдіктегі $f(\xi)$ саны $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі **орта мәні** деп аталады.

▼ f үзіліссіз болғандықтан, оның Φ алғашқы функциясы бар сондықтан

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a) = \Phi'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b). \quad ▲$$

5-мысал. $\int_0^2 x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \frac{16}{4}-0=4$ болғандықтан, мұндағы $f(x)=x^3$ функцияның $[0,2]$ кесіндісіндегі ***орта мәні*** $f(\xi)=\xi^3=\frac{1}{2-0}\int_0^2 x^3dx=\frac{1}{2}\cdot 4=2,$ және ол мәнге $\xi=\sqrt[3]{2}$ нүктесінде ие болады. Сөйтіп, $x=0,\ x=2,\ y=x^3$ қисықтарымен шенелген қисық сызықты трапецияның ауданы қабырғасы $f(\xi)=b-a=2$ тең квадраттың ауданымен бірдей болып шықты.

§ 8.2. Меншіксіз интегралдар, қасиеттері және жинақтылық белгілері

8.2.1. Бірінші және екінші текті меншіксіз интегралдар.

Біз осыған дейін анықталған интегралдар туралы айтқанда, интегралдау аралығы ақырлы және интеграл астындағы функция осы аралықта шенелген деп қабылдадық. Бірақ анықталған интеграл анықтамасын ***ақырсыз интегралдау аралығы*** *үшін және* ***шенелмеген функция*** жағдайына арнап беру қажеттігі жиі кездеседі. Енді осы мәселелерді қарастырайық.

I. f функциясы:

а) $[a,+\infty)$ аралығында берілсін;

б) кез келген ақырлы $[a;b']$ кесіндісінде Риман бойынша интегралдансын ($b' \in (a,+\infty)$).

Онда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b'\to+\infty}\int_a^{b'} f(x)dx \qquad (1)$$

өрнегі f ***функциясының*** $[a,+\infty)$ ***аралығындағы бірінші текті меншіксіз интегралы*** деп аталады. Егер мұндағы шек бар болса, онда ***меншіксіз интеграл жинақты,*** ал ол шек жоқ немесе ақырсыз болса, онда ***меншіксіз интеграл жинақсыз*** деп айтатын боламыз.

II. f функциясы:

а) ақырлы $[a,b)$ аралығында берілсін және b нүктесінің ***маңайында шенелмеген*** болсын;

б) кез келген $[a;b']$ кесіндісінде $(a < b' < b)$ Риман бойынша интегралдансын.

Онда мына өрнек

$$\int_a^{b} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)dx, \qquad (2)$$

f ***функциясының*** $[a,b]$ ***кесіндісіндегі екінші текті меншіксіз интегралы*** деп аталады. Мұнда да (2) шек бар болса, ***меншіксіз интеграл жинақты,*** ал ол шек жоқ немесе ақырсыз болса, ***меншіксіз интеграл жинақсыз*** дейміз.

Егер f функциясы үшін I ($b=+\infty$) немесе II (b нүктесінің маңайында f шенелмеген) шарттардың тек біреуі ғана бар болса, онда

$$\int_a^{b} f(x)dx \qquad (3)$$

өрнегін ***жалғыз ерекшелігі интегралдың жоғарғы b шегінде болатын интеграл*** деп атайтын боламыз.

Енді *жалғыз ерекшелігі интегралдың төменгі а шегінде болатын меншіксіз интегралды анықтайық.*

I. Егер f функциясы:

а) $(-\infty;b]$ аралығында берілген;

б) кез келген ақырлы $[a';b]$ кесіндісінде $(-\infty<a'<b)$ Риман бойынша интегралданатын болса, онда $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{a'\to-\infty}\int\limits_{a'}^{b} f(x)dx$ өрнегі f функциясының $(-\infty;b]$ ***аралығындағы бірінші текті меншіксіз интегралы*** деп аталады да, мұндағы шек бар болса, ол **жинақты**, ал ол жоқ немесе ақырсыз болса, **жинақсыз** деп аталады.

II. Егер f функциясы:

а) ақырлы $(a,b]$ аралығында берілген және a нүктесінің маңайында шенелмеген функция;

б) кез келген $[a',b]$ кесіндісінде $(a<a'<b)$ Риман бойынша интегралданатын функция болса, онда $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{a'\to a}\int\limits_{a'}^{b} f(x)dx$ өрнегі f функциясының $(a;b]$ ***аралығындағы екінші текті меншіксіз интеграл*** деп аталады да, мұндағы шек бар болса, ол ***жинақты,*** ал ол жоқ немесе ақырсыз болса, ***жинақсыз*** деп аталады.

1-мысал. Келесі 1-текті меншіксіз интеграл үшін:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1,\\ +\infty\,, & \alpha\le 1.\end{cases} \qquad (5)$$

▼ Егер $\alpha\neq 1$ болса, онда

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{b'\to+\infty}\int\limits_{1}^{b'}x^{-\alpha}dx=\lim_{b'\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{1}^{b'}=\lim_{b'\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b'^{1-\alpha}-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & 1-\alpha<0,\\ +\infty, & 1\text{-}\alpha>0.\end{cases}$$

Егер $\alpha = 1$ болса, онда

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b' \to +\infty} \ln |x| \Big|_{1}^{b'} = \lim_{b' \to +\infty} (\ln |b'| - \ln |1|) = +\infty$$ аламыз. ▲

2-мысал. Екінші текті интеграл үшін:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \ge 1. \end{cases} \tag{4}$$

▼ (4) өрнек – ерекшелігі $a = 0$ нүктесінде болатын екінші текті меншіксіз интеграл. Мұнда $\alpha \ne 1$ мәндері үшін

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & 1\text{-}\alpha > 0, \\ +\infty, & 1\text{-}\alpha < 0 \end{cases}$$

аламыз. Егер $\alpha = 1$ болса, онда

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln |x| \Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty .$$

Ал егер $\alpha < 0$ болса, онда интеграл астындағы функция $[0,1]$ интегралдау аралығында үзіліссіз және ақырлы болғандықтан, Риман бойынша интегралданады.

Сонымен қарастырылған интеграл $\alpha < 1$ үшін жинақты, ал $\alpha \ge 1$ мәндері үшін жинақсыз болады екен. ▲

3-мысал. Келесі теңдікті дәлелдейік: $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-kx} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & k > 0, \\ +\infty, & k \le 0. \end{cases}$

▼ Егер $k = 0$ болса, онда $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} dx = \lim_{b \to +\infty} b = +\infty.$

Егер $k \ne 0$ болса, онда

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx = \lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{1}{k}\right)\int_0^R e^{-kx}d(-kx) = \lim_{R\to+\infty} -\frac{e^{-kx}}{k}\Bigg|_0^R =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} -\frac{1}{k}\left(e^{-kR}-1\right) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k>0, \\ +\infty, & k<0. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Біз бұдан кейін үнемділік және ықшамдылық мақсатта меншіксіз интегралдар қаситеттерін жалғыз ерекшелігі жоғарғы интегралдау шегінде, яғни b *нүктесінде болатын интегралдарға қатысты тұжырымдаймыз, ал ол тұжырымдар жалғыз ерекшелігі* a *нүктесінде болатын интеграл үшін де орындалады.*

Теорема. (Коши критерийі) Жалғыз ерекшелігі b нүктесінде болатын $\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интегралының жинақты болуына, берілген әрбір $\varepsilon>0$ саны арқылы $b_0<b'<b''<b$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын кез келген b', b'' сандары үшін

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon \tag{4}$$

теңсіздігі орындалатындай b_0 санының табылуы қажетті және жеткілікті.

$\blacktriangledown$ $F(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad a<x<b,$ функциясын қарастырамыз. Қарастырылып отырған интегралдың бар болуы $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$ шегінің бар болуымен парапар, ал бұл шектің бар болуы Коши шартының орындалуына парапар; әрбір $\varepsilon>0$ саны арқылы $b_0<b'<b''<b$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық b', b'' сандары үшін $\left|F(b'')-F(b')\right|<\varepsilon$ шарты орындалатындай b_0 саны $(a<b_0<b)$ табылады. Енді $F(b'')-F(b')=\int_a^{b''} f(t)dt - \int_a^{b'} f(t)dt = \int_{b'}^{b''} f(t)dt$ өрнегін

алдыңғы теңсіздікке қойсақ, теорема дәлелденеді. ⏶

Жалғыз ерекшелігі b нүктесінде болатын (3) түрдегі интеграл үшін келесі теңдіктер орындалады:

1) $\int_a^b [Af(x)+Bg(x)] = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$, A, B, -сандар;

2) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)dx = \lim_{b'\to b}\left(\int_a^c fdx + \int_c^{b'} fdx\right) =$$

$$= \int_a^c fdx + \lim_{b'\to b}\int_c^{b'} fdx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a<c<b,$$

мұндағы $\int_a^b f(x)dx$ және $\int_c^b f(x)dx$ – меншіксіз интегралдар, ал бұл интегралдардың бар болуы үшін Коши шарты екеуіне де бірдей тұжырымдалатындықтан, олардың екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз болады. Ал $\int_a^c f(x)dx$ – кәдімгі Риман интегралы.

Ескерту. Меншіксіз интегралдар үшін Риман интегралына тән қасиеттердің барлығы сақтала бермейді. Мысалы, егер $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ болса, онда $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ меншіксіз интегралы жинақты, ал $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx$ меншіксіз интегралы жинақсыз.

Егер меншіксіз интеграл астындағы функцияның алғашқы функциясы белгісіз болса, онда оның жинақтылығы туралы айту қиын. Ондай жағдайларда кейде алғашқы функцияны керек етпейтін арнайы белгілерді пайдаланып, интегралдың жинақты немесе жинақсыздығын білуге болады. Енді осы мәселелерге көшейік.

8.2.2. Меншіксіз интегралдардың жинақтылық белгілері.

Таңбасы тұрақты емес функция интегралын зерттеуге арналған келесі ұғымды енгізейік. Егер

$$\int_a^b |f(x)|dx \tag{5}$$

интегралы жинақты болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \tag{6}$$

интегралы ***абсолют жинақты*** деп аталады. Егер (6) жинақты, ал (5) жинақсыз интеграл болса, онда (6) интеграл ***шартты жинақты*** деп аталады.

1-теорема. ***Абсолют жинақты интеграл – жинақты.***

▼ Шынында да, (5) интегралдың жинақтылығынан ол интеграл үшін Коши шартының орындалатыны шығады: әрбір $\varepsilon > 0$ саны арқылы $b_0 < b' < b'' < b$ теңсіздіктерін қанағат-тандыратын b', b'' нүктелері үшін $\varepsilon > \int_{b'}^{b''} |f(x)|dx \geq \left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|$ теңсіз-дігі орындалатындай b_0 нүктесі табылады. Ал бұл қатыстардан (6) интеграл үшін Коши шарты орындалып тұрғанын көреміз. ▲

(6) интегралды жинақтылыққа зерттеу үшін көбінесе

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx, \quad a < b. \tag{7}$$

теңсіздігі пайдаланылады. Бұл теңсіздікті белгілі $\left|\int_a^{b'} f(x)dx\right| \leq \int_a^{b'} |f(x)|dx$ теңсіздігінен $b' \to b$ ұмтылдырып шекке өту арқылы алады.

Егер (7) *теңсіздіктің оң жағындағы интеграл жинақты болса, онда* 1-*теорема бойынша* (6) *интеграл да жинақты.*

Ескерту. Егер $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,b)$ болса, онда (6) интегралдың жинақтылығы мен жинақсыздығын сәйкес келесі түрлерде жазады:

$$\int_a^b f(x)dx < \infty \qquad \text{және} \qquad \int_a^b f(x)dx = \infty .$$

Енді теріс емес функциялардың меншіксіз интегралдарын жинақтылыққа зерттейік.

2-теорема. Жалғыз ерекшелігі b нүктесінде болатын

$$\int_a^b f(x)dx , \tag{8}$$

$$\int_a^b \varphi(x)dx \tag{9}$$

интегралдары үшін $[a,b)$ аралығында

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x) \tag{10}$$

теңсіздіктері орындалсын. Онда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$ теңсіздігі орындалады және (9) интегралдың жинақтылығынан (8) интегралдың да жинақтылығы, ал (8) интегралдың жинақсыздығынан (9) интегралдың да жинақсыздығы шығады.

▼ (10) теңсіздіктерден $a < b' < b$ үшін

$$\int_a^{b'} f(x)dx \leq \int_a^{b'} \varphi(x)dx \tag{11}$$

аламыз. Егер (9) интеграл жинақты болса, онда (11) теңсіздіктің оң жағы, демек, сол жағы да (9) интегралға тең санмен шенеледі. Ал (11) теңсіздіктің сол жағы b' өскенде монотонды кемімейді. Сондықтан (11) теңсіздіктің сол жағының шегі үшін

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

болады, демек (8) интеграл жинақты. Керісінше, егер (8) интеграл жинақсыз болса, яғни $b' \to b$ ұмтылғанда (11) теңсіздіктің сол жағы ∞-ке ұмтылса, онда одан кіші емес оның оң жағындағы шама да ∞-ке ұмтылады, яғни (9) интеграл жинақсыз болады. ▲

4-мысал. $\int_0^{+\infty} \left|\cos\alpha x \cdot e^{-2x}\right| dx \le \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx < \infty$ теңсіздігінен

$\int_0^{+\infty} \cos\alpha x \cdot e^{-2x} dx$ интегралы абсолют жинақты болатыны шығады.

2-теорема. (8) және (9) интегралдардың ерекшелігі жалғыз b нүктесінде болсын. Егер интеграл астындағы функциялар оң және

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0 \tag{12}$$

болса, онда (8), (9) интегралдардың жинақталу сипаты бірдей (екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз) болады.

▼ (12) теңдіктен $0 < \varepsilon < A$ болатындай кез келген ε саны арқылы $c < x < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon \text{ немесе } A - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < A + \varepsilon \tag{13}$$

шарты орындалатындай $c \in [a,b)$ нүктесін табуға болады. Соңғы қос теңсіздікті $\varphi(x) > 0$ функциясына көбейтеміз.

Егер $\int_a^b \varphi dx$ жинақты болса, онда $\int_c^b \varphi dx$ және $\int_c^b (A+\varepsilon)\varphi(x)dx$ интегралдарды да жинақты. Сондықтан 1-теорема бойынша (13) қос теңсіздіктің оң жағынан $\int_c^b f(x)dx$ интегралының, олай болса $\int_a^b f(x)dx$ интегралының да жинақтылығын аламыз. Дәл осылай, керісінше, $\int_a^b fdx$ интегралының жинақтылығынан (13) қос теңсіздіктің сол жақ бөлігіне қарап $\int_a^b \varphi dx$ интегралының жинақтылығын айтуға болады.

Осы сияқты (8)-(9) интегралдарының біреуінің жинақсыздығынан екіншісінің де жинақсыздығы шығатынын дәлелдеуге болады. ▲

Алдымызда, қарастырылатын интегралдардың жинақтылық сипаттары бірдей екенін ~ таңбасы арқылы белгілейтін боламыз.

5-мысал. $\int_0^1 \frac{1}{\sin\sqrt{x}}dx$ интегралы жинақты.

▼ Шынында да, $\int_0^1 \frac{1}{\sin\sqrt{x}}dx \sim \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \infty$, өйткені

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sin\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}} = 1. \qquad ▲$$

6-мысал. Меншіксіз $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x} e^{-3x} dx$ интегралы жинақты.

▼ Шынында да, $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x} e^{-3x} \sim \int_1^{+\infty} e^{-3x} dx < \infty$, өйткені

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x-1}{x}\cdot e^{-3x}}{e^{-3x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1. \qquad ▲$$

7-мысал. $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$ $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx,$ $a > 0,$ интегралдарының ***шартты жинақты*** болатынын көрсетейік.

▼ Мына теңдіктен:

$$\int_a^E \frac{\sin x}{x} dx = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{x}\ , & dv = \sin x dx \\ du = -\frac{1}{x^2} dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -\frac{\cos x}{x}\Big|_a^E - \int_a^E \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$E \to \infty$ ұмтылдырып, шекке көшсек ($\lim_{E\to\infty}\left(-\frac{\cos E}{E}\right)=0$),

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\cos a}{a}-\int_a^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx \tag{14}$$

аламыз. Сонымен бірге $\int_a^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx \le \int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{a}<\infty$ теңсіздігі орындалатындықтан, (14) теңдіктің оң жағындағы интеграл жинақты, олай болса, $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ интегралы да ***жинақты***.

Осы сияқты, $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ интегралының да ***жинақты*** болатынын көрсетуге болады.

Енді $\int_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ интегралының ***жинақсыздығын*** көрсетейік. Ол үшін $|\sin x| \ge \sin^2 x$ теңсіздігін пайдаланамыз:

$$\int_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \ \ge \ \int_a^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx \ = \ \int_a^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx= \ |2x=u| \ =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2a}^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u}du=\frac{1}{2}\int_{2a}^{+\infty}\frac{du}{u}-\frac{1}{2}\int_{2a}^{+\infty}\frac{\cos u}{u}du\,.$$

Мұндағы $\int_{2a}^{+\infty}\frac{du}{u}$ – жинақсыз, ал $\int_{2a}^{+\infty}\frac{\cos u}{u}du$ – жинақты интег-рал. Олай болса 1-теорема бойынша $\int_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ – жинақсыз.

$\int_a^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|dx$ интегралының да жинақсыздығы осылайша көресетіледі. ▲

8.2.3. Меншіксіз интегралдардың жинақтылығының Дирихле белгісі. Ерекшеліктері бірнеше нүктеде болатын меншіксіз интегралдар

Айталық, $\varphi(x)$ функциясы $[a,+\infty)$ аралығында үзіліссіз, ал $\Phi(x)$ оның алғашқы функциясы болсын және $[a,+\infty)$ аралығында $g(x)$ үзіліссіз дифференциалданатын функция болсын.

Дирихле белгісі. Егер $\Phi(x)$ шенелген $\left(\Phi(x) \le \mathrm{M}\right)$, ал $g(x)$ кемімелі және $x \to \infty$ ұмтылғанда нөлге ұмтылатын функция болса, онда келесі интеграл жинақты:

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) g(x) dx . \tag{15}$$

▼ Бөліктеп интегралдау формуласы арқылы есептейміз:

$$\int_a^E \varphi(x) g(x) dx = \left| \begin{matrix} u = g(x)\ , \ dv = \varphi(x)dx, \\ du = g'(x)dx, \quad v = \int \varphi(x)dx = \Phi(x) \end{matrix} \right| = g(x)\Phi(x)\Big|_a^E -$$

$$-\int_a^E \Phi(x) g'(x) dx = g(E)\Phi(E) - g(a)\Phi(a) - \int_a^E \Phi(x) g'(x) dx . \tag{16}$$

Мұнда $\Phi(x)$ шенелген, ал $g(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ нөлге ұмтылатындықтан, $\lim\limits_{E\to\infty} g(E)\Phi(E) = 0$. Сонымен бірге

$$\left| \int_a^\infty \Phi(x) g'(x) dx \right| \le \int_a^\infty |\Phi(x)| \cdot |g'(x)| dx \le \mathrm{M} \cdot \int_a^\infty |g'(x)| dx =$$

$$= |g'(x) < 0| = -\mathrm{M} \int_a^\infty g'(x) dx = -\mathrm{M} \lim_{E\to\infty} \int_a^E g'(x) dx =$$

$$= -\mathrm{M} \lim_{E\to\infty} [g(E) - g(a)] = g(a) \cdot \mathrm{M}$$

екенін ескеріп, (16) қатыстан $E \to \infty$ ұмтылдырып шекке өтсек, (15) интегралдың жинақтылығын аламыз. ▲

8-мысал. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ интегралын жинақтылыққа зерттейік.

▼ Мұнда $\varphi(x) = \cos x$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ деп алсақ,

Дирихле шарты орындалатынын көреміз: $|\Phi(x)| = |\sin x| \le 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Олай болса Дирихле белгісі бойынша берілген интеграл жинақты. ▲

9-мысал. Келесі Френель интегралын: $\int\limits_{0}^{\infty} \sin x^2 dx$ жинақтылыққа зерттеу керек.

▼ Берілген $\int\limits_{0}^{\infty} \sin x^2 dx$ интегралы мен $\int\limits_{1}^{\infty} \sin x^2 dx$ интегралы-ның жинақталу сипаты бірдей болғандықтан, екінші интегралды жинақтылыққа зерттесек болғаны. Мына $\int\limits_{1}^{\infty} \sin x^2 dx = \int\limits_{1}^{\infty} x \cdot \sin x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$ интегралда $\varphi(x) = x \sin x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ деп алсақ, Дирихле белгісінің шарттары орындалатынын көреміз: $|\Phi(x)| = \left| -\frac{1}{2} \cos x^2 \right| \le \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Олай болса $\int\limits_{1}^{\infty} \sin x^2 dx$ интегралы жинақты, демек, Френель интегралы жинақты. ▲

Анықтама. (a,b) аралығын $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_N = b$ нүктелерімен әрбір $\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, (17) интегралдың жалғыз ерекшелігі c_k нүктесінде немесе c_{k+1} нүктесінде болатындай етіп ақырлы санды (c_k, c_{k+1}), $k = 0,1,\ldots,N-1$ аралықтарына бөлуге болатын болсын.

Егер (17) интегралдардың барлығы да жинақты (абсолют жинақты) болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \tag{18}$$

интегралы *жинақты (абсолют жинақты) меншіксіз интеграл* деп аталады және келесі теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx\ .$$

Егер (17) интегралдардың ең болмағанда біреуі жинақсыз болса, онда (18) интеграл жинақсыз деп саналады.

10-мысал. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx$ интегралы жинақсыз.

▼ Шынында да,

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx = \left|-x=t\right| = -\int_{\infty}^{0} e^{t}dt = \lim_{E\to\infty}\int_0^E e^t dt = \lim_{t\to\infty} e^t\Big|_0^E = \infty$$

болғандықтан, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \infty + 1 = \infty$. ▲

11-мысал. $\alpha > 0$ үшін

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx = \begin{cases} 0<\alpha\le 1 & \text{болса, жинақты,} \\ 1<\alpha<2 & \text{болса, абсолют жинақты,} \\ \alpha \ge 2 & \text{болса, жинақсыз} \end{cases} \tag{19}$$

▼ Интегралдың $x=0$ және $x=\infty$ нүктелерінде екі ерекше-лігі бар, сондықтан $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$. Бізге $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

нүктелері үшін $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ теңсіздіктері орындалатыны белгілі. Бұл қос теңсіздікті $x^{\alpha} > 0$ дәрежеге мүшелеп бөлсек, $\frac{2}{\pi}x^{1-\alpha} \le \frac{\sin x}{x^{\alpha}} \le x^{1-\alpha}, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ аламыз. Олай болса $(0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{2})$, $\alpha < 2$ үшін $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx \le \int_0^1 x^{1-\alpha} dx < \infty$, ал, $\alpha \ge 2$ үшін $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx \ge \frac{2}{\pi}\int_0^1 x^{1-\alpha} dx = \infty$ орындалады.

Бұдан $(\frac{\sin x}{x^{\alpha}} > 0, \quad 0 < x \le 1)$ мынадай қорытынды аламыз:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx \quad \text{интегралы} \quad \begin{cases} \alpha < 2 & \text{үшін абсолют жинақты,} \\ \alpha \ge 2 & \text{үшін жинақсыз} \end{cases}$$

Соңғы екі мәліметтен (19) тұжырымның дұрыстығы шығады. ▲

§ 8.3. Анықталған интегралдың қолданылуы

8.3.1. Қисық доғасының ұзындығы.

Келесі параметрлік теңдеулерді қарастырайық:

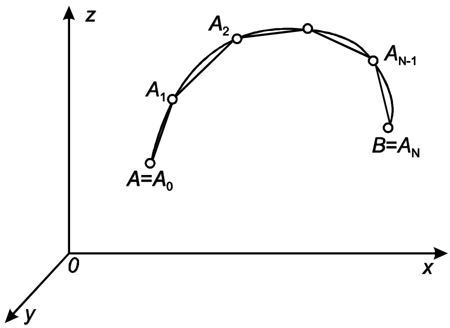
$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \quad a \le t \le b. \end{cases} \tag{1}$$

Мұндағы t параметрінің өзгеруіне байланысты $P(x,y,z) = P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$ нүктесі орнын ауыстыра отырып, кеңістіктегі қандай да бір қисықты сызып шығады. Ол қисықты Γ арқылы белгілейік. Параметр t-нің әртүрлі, мысалы, $t = t_1$, $t = t_2$ $(t_1 \ne t_2)$ мәндеріне кеңістіктің бір ғана нүктесі сәйкес келуі мүмкін: $P_1(\varphi(t_1),\psi(t_1),\chi(t_1)) = P_2(\varphi(t_2),\psi(t_2),\chi(t_2))$.

Егер параметрлік теңдеулердегі φ, ψ, χ ***функциялары*** $[a,b]$ ***кесіндісінде үзіліссіз*** болса, онда олар үш өлшемді ***кеңістіктегі үзіліссіз қисықты*** анықтайды.

Ескерту. Жазықтықтағы қисық $y = f(x), \quad a \le x \le b$ функция-сымен анықталсын. Онда функцияны параметрі $t = x$ болатын $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ $a \le x \le b$, параметрлік теңдеулері арқылы жазуға болады, ал бұл – (3) параметрлік теңдеулердің $\begin{cases} \varphi(x) = 1 \cdot x, \\ \psi(x) = f(x), \end{cases}$ $a \le x \le b$ түріндегі дербес жағдайы.

Енді Г үзіліссіз ***қисық доғасының ұзындығы*** туралы ұғым енгізейік. Г үзіліссіз қисығы (1) теңдеулер арқылы берілсін. Егер $[a,b]$ кесіндісін $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = b$ нүктелерімен бөліктесек, онда әрбір t_k мәніне қисықтың $A_k\left(\varphi(t_k), \psi(t_k), \chi(t_k)\right) \in \Gamma$ нүктесі сәйкес келеді ($A_0 = A, \ A_N = B$, 68-сурет). Егер A_k нүктелерін тізбектеп



68-сурет

$A_k A_{k+1}$ кесінділерімен қоссақ, онда Г қисығына іштей сызылған $\Gamma_N = A_0 A_1 ... A_N$ сынығы шығады. Оның $|\Gamma_N|$ ұзындығы $A_k A_{k+1}$ бөліктерінің:

$$A_k A_{k+1} = \left|(\varphi(t_{k+1}), \psi(t_{k+1}), \chi(t_{k+1})) - (\varphi(t_k), \psi(t_k), \chi(t_k))\right| =$$

$$= \left|(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k), \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k), \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k))\right| =$$

$$= \left|(\Delta\varphi(t_k), \Delta\psi(t_k), \Delta\chi(t_k))\right| = \sqrt{\Delta^2\varphi(t_k) + \Delta^2\psi(t_k) + \Delta^2\chi(t_k)}$$

ұзындықтарының қосындысына тең:

$$\left|\Gamma_N\right| = \sum_{k=0}^{N-1} \left|A_k A_{k+1}\right| = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\Delta^2\varphi(t_k) + \Delta^2\psi(t_k) + \Delta^2\chi(t_k)}. \qquad (2)$$

Егер $\max\limits_{k=0,1,\cdots,N-1..} \Delta t_k \to 0 \quad (\Delta t_k = t_{k+1} - t_k)$ нөлге ұмтылғанда $\left|\Gamma_N\right|$ қосындысының шегі бар болса, онда ол сан Г ***доғасының ұзындығы*** деп аталады да $|\Gamma|$ арқылы белгіленеді:

$$|\Gamma| = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \left|\Gamma_N\right|. \qquad (3)$$

Егер бұл ***шек ақырлы*** болса, онда Г – **түзуленетін қисық** деп аталады. Қисықтың ұзындығы $|\Gamma| = +\infty$ тең болуы да мүмкін!

Теорема. Егер $\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \quad a \le t \le b$ теңдеулеріндегі φ, ψ, χ функцияларының (*ақырлы*) ***туындылары*** $[a,b]$ кесіндісінде ***үзіліссіз*** болса, онда Г - **түзуленетін қисық** және оның ұзындығы

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt. \qquad (4)$$

▼ (2) теңдіктегі φ, ψ, χ функцияларына Лагранж теоремасын қолданамыз ($\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$)

$$\Delta\varphi(t_k) = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\xi_k)\left(t_{k+1} - t_k\right) = \varphi'(\xi_k)\Delta t_k, \quad \xi_k \in \Delta_k,$$

$$\Delta\psi(t_k) = \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(\sigma_k)\left(t_{k+1} - t_k\right) = \psi'(\sigma_k)\Delta t_k, \quad \sigma_k \in \Delta t_k,$$

$$\Delta\chi(t_k) = \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k) = \chi'(\zeta_k)\left(t_{k+1} - t_k\right) = \chi'(\zeta_k)\Delta t_k, \quad \zeta_k \in \Delta t_k.$$

Олай болса $\left(\lambda_R = \max\limits_k \Delta t_k\right)$,

$$\left|\Gamma_N\right| = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\Delta^2\varphi(t_k) + \Delta^2\psi(t_k) + \Delta^2\chi(t_k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\sigma_k)^2 + \chi'(\zeta_k)^2}\,\Delta t_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\xi_k)^2 + \chi'(\xi_k)^2}\,\Delta t_k + r_{N_{\lambda_R}}, \qquad (5)$$

мұнда $r_{N_{\lambda_R}} = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\sigma_k)^2 + \chi'(\zeta_k)^2}\,\Delta t_k -$

$$- \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\xi_k)^2 + \chi'(\xi_k)^2}\,\Delta t_k \,.$$

Егер (85 теңдіктен $\max \Delta t_k \to 0$ ұмтылдырып шекке өтсек, онда (4) теңдікті аламыз. Шынында да, φ', ψ', χ' туындылары үзіліссіз болғандықтан $[a,b]$ кесіндісінде $\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}$ функциясы интегралданады

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\sigma_k)^2 + \chi'(\zeta_k)^2}\,\Delta t_k = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\, dt.$$

Сонымен бірге үшбұрыштың екі қабырғасының ұзындықтарының айырымы үшінші қабырғасының ұзындығынан аспайтындығын өрнектейтін келесі теңсіздікті

$$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\right| \le \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

пайдалансақ $\left|r_N\right| =$

$$= \left|\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\sigma_k)^2 + \chi'(\zeta_k)^2}\,\Delta t_k - \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\xi_k)^2 + \chi'(\xi_k)^2}\,\Delta t_k\right]\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{N-1} \left|\sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\sigma_k)^2 + \chi'(\zeta_k)^2} - \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\xi_k)^2 + \chi'(\xi_k)^2}\right| \cdot \Delta t_k \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{0^2 + [\psi'(\sigma_k) - \psi'(\xi_k)]^2 + [\chi'(\zeta_k) - \chi'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta t_k \qquad (6)$$

аламыз. Ал ψ', χ' функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан, олар $[a,b]$ кесіндісінде бірқалыпты үзіліссіз (3.13п. Кантор теоремасы), сондықтан кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\max\limits_k \Delta t_k = \max\limits_k (t_{k+1} - t_k) < \delta$ болса, онда

$$|\psi'(\sigma_k) - \psi'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad |\chi'(\zeta_k) - \chi(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

теңсіздіктері орындалады да, (6) теңсіздіктен

$$|r_N| \le \sum_{k=0}^{N} \sqrt{\left[\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right]^2 + \left[\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right]^2} \Delta t_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2(b-a)} \Delta t_k = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2(b-a)} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon < \varepsilon \ (\forall \varepsilon > 0),$$

яғни $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$ ұмтылғанда $r_N \to 0$ шығады. ▲

Егер қисық жазықтықта ***параметрлік теңдеулермен*** берілсе:

$$\Gamma = A\breve{B} \subset R^2 : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad a \le t \le b,$$

онда оның ұзындығы

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt. \qquad (4')$$

Дербес жағдайда, $\Gamma \subset R^2$ қисығы туындысы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз f ***функциясы арқылы*** берілсе Г: $y = f(x), \quad a \le x \le b$,

онда оны x параметрі арқылы жазып: $\Gamma: \begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \quad a \le x \le b, \end{cases}$

$(4')$ формуланы қолданамыз

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx. \qquad (7)$$

1-мысал. Астроиданың ұзындығын табу керек: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

▼ Бұл қисық координаттық өстермен салыстырғанда симметриялы болғандықтан, оның бірінші квадранттағы бөлігінің ұзындығын тауып (бұл бөлігі үшін, $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$) алып, оны 4 көбейтсек болғаны. Сонымен $\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \cdot \sin t,$ $\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cdot \cos t.$ Есептейміз:

$$\frac{1}{4}\cdot|L| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2\sin^4 t \cdot \cos^2 t} \cdot dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \cdot \sin^2 t} \cdot dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t \cdot dt = 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}; \quad |L| = 4\cdot\frac{3a}{2} = 6a. \quad ▲$$

2-мысал. Γ: $y = chx,\ 0 \le x \le 2,$ қисығының ұзындығын табу керек.

▼ Мұнда (7) формуланы пайдаланамыз:

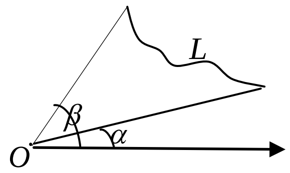
$$|\Gamma| = \int_0^2 \sqrt{1+(shx)^2}dx = \int_0^2 chxdx = shx\Big|_0^2 = sh2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}. \quad ▲$$

3-мысал. $L: \begin{cases} x = a\cdot\cos t, \\ y = a\cdot\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi \\ z = at, \end{cases}$ винттік сызықтың ұзындығын табу керек.

▼ Бұл үш өлшемді кеңістіктегі қисық үшін (4) формуланы қолданып, есептейміз: $x'_t = -a\cdot\sin t,$ $y'_t = a\cdot\cos t,$ $z'_t = a;$

$$|L|=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2}\,dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+1}\,dt=a\sqrt{2}\cdot 2\pi. \blacktriangle$$

Егер $\Gamma\subset R^2$ қисығы ***поляр координаттары*** арқылы берілсе: $\Gamma:\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta,$ онда (төмендегі сурет) $x=\rho(\varphi)\cdot\cos\varphi,$ $y=\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$ қатыстардан φ бұрышын параметр ретінде қарастыра отырып, (4′) формуласы бойынша келесі теңдікті аламыз



$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi\right]^2+\left[\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi\right]^2}\cdot d\varphi=$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho'\cos\varphi)^2-2\rho'\cdot\rho\cos\varphi\cdot\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+(\rho'\sin\varphi)^2+}$$

$$\overline{+2\rho'\rho\sin\varphi\cos\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}\cdot d\varphi=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\cdot d\varphi.$$

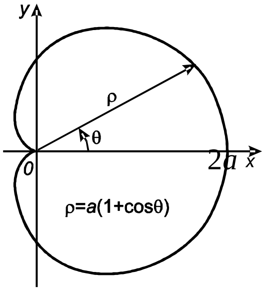
Сонымен, егер қисық полярлық координаттар арқылы берілсе:

$$\Gamma:\ \rho=\rho(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta,$$

онда
$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\cdot d\varphi\,. \tag{8}$$

4-мысал. $L:\ \rho=a(1+\cos\varphi)$ кардиоидасының ұзындығын табу керек (69-сурет).

▼ Қисық Ox өсімен салыстырғанда симметриялы болғандықтан, оның жарты бөлігінің $(0\le\varphi\le\pi)$ ұзындығын екіге көбейтсе болғаны (8-формула).



69-сурет

$$\frac{1}{2}|L| = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} \cdot d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi} \cdot d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} \cdot d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| \cdot d\varphi = \left| \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \pi \;\Leftrightarrow\; 0 \le \frac{\varphi}{2} \le \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \cos\frac{\varphi}{2} \ge 0 \end{array} \right| =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a\,, \quad |L| = 8a\,. \quad \blacktriangle$$

Тапсырма. $L:\ \rho = 1+\sin\varphi$ кардиоидасының ұзындығын табу керек.

Назарыңызға. Егер параметрдің t мәніне сәйкес келетін $\Gamma = A\breve{B}$ доғасының айнымал нүктесі C, ал $A\breve{C}$ доғаның ұзындығы S болса, онда $S = \mu(t) = \int_a^t \sqrt{\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2 + \chi'(u)^2}\,du\,,\quad a \le t \le b,$ өрнегі интегралдың жоғарғы шегіне тәуелді функция болады.

Интеграл астында u-ға тәуелді үзіліссіз функция тұрғандықтан, доғаның S ұзындығының t бойынша туындысы

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,, \tag{9}$$

тең, ал доғаның дифференциалы

$$dS=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt. \qquad (10)$$

8.3.2. Жазық фигура ауданы

Егер $[a,b]$ кесіндісінде функция $f(x)\geq 0$ болса, онда анықталған интеграл анықтамасы бойынша, $y=f(x)$ қисығымен, Ox өсімен және $x=a,\ \ x=b$ түзулерімен шенелген қисық сызықты трапеция ауданы мынаған тең:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx. \qquad (1)$$

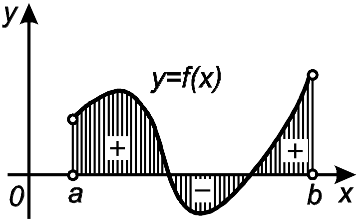
Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)\leq 0$ болса, онда (1) интеграл да нөлден кіші немесе нөлге тең болады, ал бірақ оның абсолют шамасы сәйкес қисық сызықты трапецияның ауданына тең.

Егер $f(x)$ таңбасы $[a,b]$ кесіндісінде ақырлы сан рет өзгерсе, онда $y=f(x),\ \ Ox,\ \ x=b$ сызықтарымен шенелген жазық фигура ауданы үшін $[a,b]$ кесіндісін $f(x)$ таңбасы тұрақты болатындай бөліктерге бөліп, осы бөліктер бойынша алынған интегралдардың абсолют шамаларының қосындысын алуға болады немесе

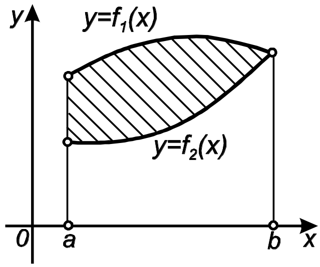
$$S=\int_a^b |f(x)|dx \qquad (2)$$

интегралын есептеу керек (70-сурет).

Егер $y=f_1(x),\ \ y=f_2(x),\ \ x=a,\ x=b$ $(f_2(x)\leq f_1(x),\forall x\in[a,b])$ қисықтарымен шенелген фигура (71-сурет)



70-сурет



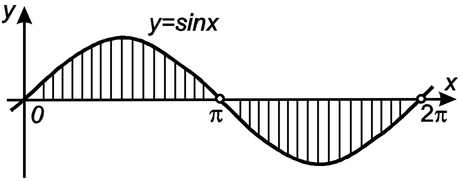
71-сурет

ауданын табу керек болса, онда келесі формуланы қолдануға болады:

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx. \qquad (3)$$

5-мысал. $y=\sin x,\quad 0\le x\le 2\pi,$ синусоида және Ox өсімен шенелген жазық фигура ауданын табу керек (72-сурет).

▼



72-сурет

$0\le x\le\pi$ үшін $\sin x\ge 0$, ал $\pi\le x\le 2\pi$ үшін $\sin x\le 0$ болатындықтан, (2) теңдік бойынша фигура ауданы мынаған тең

$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x\cdot dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\cdot dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=$$

$=1+1+1+1=4.$ ▲

Егер ***қисық келесі параметрлік теңдеулермен берілсе***:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta\quad (\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b),$$

онда (1) интегралда $x=\varphi(t)$ айнымал алмастыруын жасай отырып, $(dx=\varphi'(t)dt,\ y=f(x)=f[\varphi(t)]=\psi(t))$ мына формуланы аламыз:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt\ . \qquad (4)$$

6-мысал. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ эллипсімен шенелген фигура ауданын табу керек.

▼ Мұнда эллипстің параметрлік теңдеулеріне өту тиімді: $x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$.

Онда (4) формула бойынша эллипстің координат өстеріне қатысты симметриялығын және $x=0,\ 0=a\cos t \ \Rightarrow\ t=\dfrac{\pi}{2};$

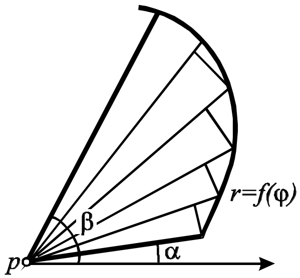
$x=a,\ a=a\cdot\cos t \ \Rightarrow\ t=0$ ескере отырып,

$$\frac{S}{4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)\cdot dt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\cdot dt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=-\frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=-\frac{ab}{2}\left(0-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi ab}{4},\quad S=\pi ab \quad \text{аламыз.} \ \blacktriangle$$

Енді O полюсінен шығатын, $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ сәулелерімен және *полярлық координаттары бойынша үзіліссіз* $r=f(\varphi)$ қисығымен шенелген фигураның S ауданын анықтайық (73-сурет).

Секторды поляр өсімен арасындағы бұрыштары сәйкес $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<...<\varphi_n=\beta$ болатын сәулелер арқылы n дербес секторларға бөлеміз. Әрбір қисық сызықты секторды дөңгелек сектормен ауыстырамыз, басқаша айтқанда, әрбір $[\varphi_k;\ \varphi_{k+1}]$, $k=0,1,...,n-1,$ кесіндіде $f(\varphi)$ тұрақты және $r_k=f(\varphi_k)$ мәніне тең деп санаймыз.



73-сурет

Онда осындай n дөңгелек сектордан тұратын фигура ауданы

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f^2(\varphi_i)(\varphi_{i+1}-\varphi_i),\quad \Delta\varphi_i=\varphi_{i+1}-\varphi_i.$$

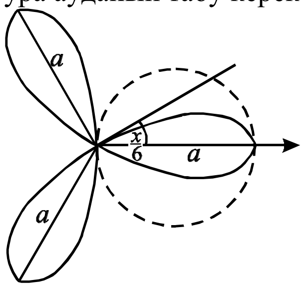
Анықтама бойынша, $r = f(\varphi)$ қисығымен және $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ сәулелерімен шенелген фигура ауданы

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$$

немесе

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\cdot d\varphi . \tag{5}$$

7-мысал. Үш жапырақты роза деп аталатын $r = a\cos 3\varphi$ сызығымен шенелген фигура ауданын табу керек (74-сурет).



74-сурет

▼ Бір жапырақтың жартысының ауданы (5) формула бойынша келесі интегралмен өрнектеледі $\frac{S}{6} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 3\varphi \cdot d\varphi$. Сондықтан роза ауданы

$$S = 6\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi \cdot d\varphi = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} d\varphi =$$

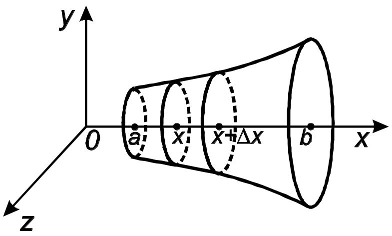
$$= \frac{3a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/6} = \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^2}{4},$$

яғни диаметрі a тең дөңгелек ауданына тең. ▲

8.3.3. Айналу денесінің көлемі. Тікбұрыштық x, y координаттар жүйесінде үзіліссіз, оң $y = f(x)$, $a \le x \le b$, функциясымен сипатталған Г қисығы берілсін. Г қисығының х өсін айналуынан шыққан бетпен және $x = a$, $x = b$ жазықтықтарымен шенелген айналу денесінің $\boldsymbol{V}$ көлемін есептеу керек болсын (75-сурет).

▼ $[a,b]$ кесіндісін $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ нүктелерімен бөліктесек, онда $x = x_{k+1}$ жазықтықтарымен шенелген дене көлемінің ΔV элементінің жуық мәні: биіктігі $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ және радиусі $y_k = f(x_k)$ болатын цилиндр көлеміне тең:

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \cdot \Delta x_k = \pi f(x_k)^2 \Delta x_k .$$



75-сурет

Ал $V_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(x_k)\Delta x_k$ шамасы V көлемнің мәнін жуық түрде сипаттайды, ал оның дәл мәні

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(x_k)\Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

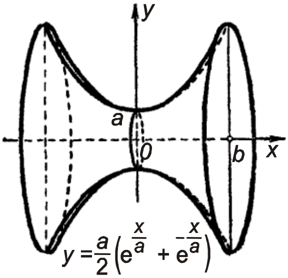
Сонымен ***айналу денесінің көлемі*** келесі формуламен есептеледі:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \quad ▲ \qquad (6)$$

8-мысал. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ шынжыр сызығының Ox өсін айналуынан шыққан ***котеноид*** деп аталатын бетпен және $x = 0$, $x = b$ жазықтықтары мен шенелген дене көлемін табу керек (76-сурет).

▼ $$V=\pi\frac{a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=\frac{\pi a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]\Bigg|_a^b=\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\frac{\pi a^2 b}{2}.$$ ▲



76-сурет

Ескерту. Материал көлемінің шектеулілігіне байланысты анықталған интегралдың геометрия мен физикадағы көптеген басқа қолданылуларын қарастыра алғанымыз жоқ. Оны оқушы, мысалы, [1], 7-тарау, § 74, § 75; [4], 6-тарау, § 1, 103 п., § 2. 105 п., 106 п. т.б. оқу құралдарынан оқи алады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Анықталған интеграл ұғымына алып келетін геометриялық және физикалық есептерді тұжырымдаңыз және олардың шешімін шек арқылы алуға болатынын түсіндіріңіз. Анықталған интеграл анықтамасын келтіріңіз.
2. Интегралдау аралығында үзіліссіз болатын функция үшін Ньютон-Лейбниц формуласын дәлелдеңіз.
3. Кесіндіде шенелген функция интегралдана ма?
4. Анықталған интегралдың қасиеттерін атаңыз және келесі теңдіктерді дәлелдеңіз:

   1) $\int_a^b\left[Af(x)+Bg(x)\right]dx=A\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad c \in R$.

5. Келесі функцияның: $F(x) = \int\limits_a^x f(u)du$ қасиеттері туралы теорема-
ларды тұжырымдаңыз және оның $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болатынын көрсетіңіз.

6. Келесі теңдікті дәлелдеңіз: $\int\limits_{-1}^x sign(u)du = |x| - 1, \ \ x \in [-1; \ 1]$.
7. Анықталған интегралда айнымал ауыстыруы қалай орындалады? Мысал келтіріңіз.
8. Координат басына салыстырғанда симметриялы кесіндіде интегралданатын жұп, тақ функцияларға, периодты функцияларға қатысты теңдіктерді дәлелдеңіз. Мысалдар келтіріңіз.
9. Анықталған интеграл үшін бөліктеп интегралдау формуласын дәлелдеңіз. Мысал келтіріңіз.
10. Орта мән туралы теореманы дәлелдеңіз және оның геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.
11. Бірінші және екінші текті меншіксіз интегралдардың анықтама-ларын ерекшелігі жоғарғы интегралдау шегінде болатын жағдай үшін беріңіз.
12. Бірінші және екінші текті меншіксіз интегралдардың анықтама-ларын ерекшелігі төменгі интегралдау шегінде болатын жағдай үшін беріңіз.
13. Келесі қатысты дәлелдеңіз: $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1; \\ +\infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}$. Бұл меншік-
сіз интегралдың тегін көрсетіңіз.
14. Келесі қатысты дәлелдеңіз: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1; \\ +\infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}$. Бұл меншік-
сіз интегралдың тегін көрсетіңіз.

15. Келесі қатысты дәлелдеңіз: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & k > 0; \\ +\infty, & k \le 0 \end{cases}$. Бұл меншіксіз интегралдың тегін көрсетіңіз.
16. Меншіксіз интегралдар үшін Риман интегралының барлық қасиеттері сақтала ма? Сақталмаған жағдай үшін мысал келтіріңіз.
17. Абсолют және шартты жинақты меншіксіз интегралдардың анықтамаларын беріңіз. Мысалдар келтіріңіз.
18. Теріс емес функциялардың меншіксіз интегралдарының жинақтылығының салыстыру белгілерін тұжырымдаңыз. Мысалдар келтіріңіз.
19. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx, \quad a > 0$ түріндегі меншіксіз интегралдың шартты жинақтылығын дәлелдеңіз.
20. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx, \quad a > 0$ түріндегі меншіксіз интегралдың шартты жинақтылығын дәлелдеңіз.
21. Меншіксіз интегралдардың жинақтылығының Дирихле белгісін дәлелдеңіз. Мысал келтіріңіз.
22. Ерекшеліктері бірнеше нүктеде болатын меншіксіз интегралдың анықтамасын беріңіз. Мысал келтіріңіз.
23. Қисық доғасының ұзындығы деген не? Қисық доғасы-ның ұзындығы қандай жағдайда болмайды?
24. Параметрлік теңдеулермен берілген қисық доғасының ұзындығы туралы теореманың тұжырымын келтіріңіз. Мысал келтіріңіз.
25. Егер жазықтықтағы қисық теңдеуі $y = f(x), \quad a \le x \le b$ түрінде берілсе, онда оның ұзындығының формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.
26. Ерекшеліктері бірнеше нүктеде болатын меншіксіз интегралдың анықтамасын беріңіз. Мысал келтіріңіз.
27. Қисық доғасының ұзындығы деген не? Қисық доғасы-ның ұзындығы қандай жағдайда болмайды?

28. Параметрлік теңдеулермен берілген қисық доғасының ұзындығы туралы теореманың тұжырымын келтіріңіз. Мысал келтіріңіз.
29. Егер жазықтықтағы қисық теңдеуі $y = f(x)$, $a \le x \le b$ түрінде берілсе, онда оның ұзындығының формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.
30. Егер жазықтықтағы қисық теңдеуі полярлық коорди-наттар арқылы берілсе, онда оның ұзындығының формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.
31. Жазық фигураның ауданын табу формуласын, фигураны шектеп тұрған қисық теңдеуінің берілу түріне байланыстырып жазыңыз. Мысал келтіріңіз.
32. Айналу денесінің көлемін табу формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.

8.1-ҮТ

Анықталған интегралдарды үтірден кейін екі мәнге дейінгі дәлдікпен есептеңіз

1.

1.1. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$ **(Жауабы: 2,01.)**

1.2. $\int_0^{2\sqrt[6]{3}} \frac{12x^5\,dx}{\sqrt{x^6+1}}.$ **(Жауабы: 51,56.)**

1.3. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^2+1}.$ **(Жауабы: 0,21.)**

1.4. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$ **(Жауабы: 0,33.)**

1.5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx.$ **(Жауабы: 0,57.)**

1.6. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2+1}$. **(Жауабы: 0,41.)**

1.7. $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$. **(Жауабы: - 0,67.)**

1.8. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$. **(Жауабы: 1,24.)**

1.9. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$. **(Жауабы: 1,50.)**

1.10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{z^3}{z^8+1}\,dz$. **(Жауабы: 0,20.)**

1.11. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos 2x}$. **(Жауабы: 0,50.)**

1.12. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. **(Жауабы: 1,57.)**

1.13. $\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$. **(Жауабы: 0,63.)**

1.14. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}\,dx$. **(Жауабы: 3,14.)**

1.15. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$. **(Жауабы: 1,07.)**

1.16. $\int\limits_{1}^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **(Жауабы: 0,13.)**

1.17. $\int\limits_{0}^{1} 3\left(x^2+x^2e^{x^3}\right)dx$. **(Жауабы: 2,72.)**

1.18. $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$ **(Жауабы: - 1,73.)**

1.19. $\int\limits_{1}^{\sqrt[6]{3}} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1+x^6}}.$ **(Жауабы: 0,09.)**

1.20. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin \ln x}{x} dx.$ **(Жауабы: 0,46.)**

1.21. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx.$ **(Жауабы: 0,52.)**

1.22. $\int\limits_{3}^{8} \sqrt{x+1}\, dx.$ **(Жауабы: 12,67.)**

1.23. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\alpha \cos^3\alpha\, d\alpha.$ **(Жауабы: 0,14.)**

1.24. $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6} 12 \operatorname{ctg} 3x dx.$ **(Жауабы: 2,77.)**

1.25. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}.$ **(Жауабы: 0,67.)**

1.26. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x\, dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ **(Жауабы: 0,32.)**

1.27. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x} dx.$ **(Жауабы: 0,33.)**

1.28. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}.$ **(Жауабы: - 0,13.)**

1.29. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\alpha \sin^3\alpha\, d\alpha.$ **(Жауабы: 0,23.)**

1.30. $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{xdx}{\cos^2\left(x^2\right)}.$ **(Жауабы: 0,50.)**

2.

2.1. $\int\limits_{2}^{3} y\ln\left(y-1\right) dy.$ **(Жауабы: 1,02.)**

2.2. $\int\limits_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx.$ **(Жауабы: 5,76.)**

2.3. $\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cos x\, dx.$ **(Жауабы: 0,57.)**

2.4. $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x\, dx.$ **(Жауабы: 5,86.)**

2.5. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\, dx.$ **(Жауабы: 1,57.)**

2.6. $\int\limits_{1}^{2} \left(y-1\right)\ln y\, dy.$ **(Жауабы: 0,25.)**

2.7. $\int\limits_{-1/2}^{0} xe^{-2x}\, dx.$ **(Жауабы: - 0,25.)**

2.8. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\, dx.$ **(Жауабы: - 1,57.)**

2.9. $\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}\, dx.$ **(Жауабы: 0,82.)**

2.10. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$ **(Жауабы: 0,16.)**

2.11. $\int\limits_{1}^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx.$ **(Жауабы: 18,33.)**

2.12. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$ **(Жауабы: 0,57.)**

2.13. $\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}\,dx.$ **(Жауабы: 6,28.)**

2.14. $\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x\,dx.$ **(Жауабы: 0,02.)**

2.15. $\int_1^2 y^2 \ln y\,dy.$ **(Жауабы: 1,07.)**

2.16. $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,dx.$ **(Жауабы: 0,15.)**

2.17. $\int_{3/2}^2 \operatorname{arctg}(2x-3)\,dx.$ **(Жауабы: 0,21.)**

2.18. $\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x\,dx.$ **(Жауабы: 4,00.)**

2.19. $\int_1^2 x\ln^2 x\,dx.$ **(Жауабы: 1,60.)**

2.20. $\int_{-3}^0 (x-2)e^{-\frac{x}{3}}\,dx.$ **(Жауабы: - 19,32.)**

2.21. $\int_0^{\pi/9} \frac{xdx}{\cos^2 3x}.$ **(Жауабы: 0,12.)**

2.22. $\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x)\,dx.$ **(Жауабы: 0,13.)**

2.23. $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx.$ **(Жауабы: 0,47.)**

2.24. $\int_{-1}^{0} x\ln(1-x)\,dx.$ **(Жауабы: - 0,25.)**

2.25. $\int_{0}^{1} \arcsin\frac{x}{2}\,dx.$ **(Жауабы: - 0,56.)**

2.26. $\int_{1}^{2} \ln(3x+2)\,dx.$ **(Жауабы: 1,87.)**

2.27. $\int_{1}^{e} x\ln x\,dx.$ **(Жауабы: 2,10.)**

2.28. $\int_{-1}^{0} (x+1)\,e^{-2x}\,dx.$ **(Жауабы: 1,10.)**

2.29. $\int_{0}^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx.$ **(Жауабы: 0,13.)**

2.30. $\int_{0}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$ **(Жауабы: 0,29.)**

3.

3.1. $\int_{0}^{1} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx.$ **(Жауабы: 1,79.)**

3.2. $\int_{2}^{3} \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}\,dx.$ **(Жауабы: 9,67.)**

3.3. $\int_{2}^{3} \frac{x+2}{x^2(x-1)}\,dx.$ **(Жауабы: 0,53.)**

3.4. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2(x-1)}.$ **(Жауабы: 0,12.)**

3.5. $\int_{-1}^{1} \frac{y^5dy}{y+2}.$ **(Жауабы: - 0,09.)**

3.6. $\int_{2}^{3} \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}\,dx.$ **(Жауабы: 1,62.)**

3.7. $\int_{1/3}^{1/2} \frac{xdx}{(x-1)^3}.$ **(Жауабы: - 0,375.)**

3.8. $\int_{4}^{5} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$ **(Жауабы: 0,04.)**

3.9. $\int_{3}^{4} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$ **(Жауабы: 0,16.)**

3.10. $\int_{0}^{1} \frac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx.$ **(Жауабы: - 1,63.)**

3.11. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$ **(Жауабы: 0,15.)**

3.12. $\int_{3}^{5} \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}\,dx.$ **(Жауабы: 0,50.)**

3.13. $\int_{0}^{1} \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}\,dx.$ **(Жауабы: - 0,20.)**

3.14. $\int_{-1}^{0} \frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}\,dx.$ **(Жауабы: 9,38.)**

3.15. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+3x+2}.$ **(Жауабы: 0,12.)**

3.16. $\int_{8}^{10} \frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x}\,dx.$ **(Жауабы: 0,29.)**

3.17. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}.$ **(Жауабы: 0,16.)**

3.18. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^7 dx}{1-x^4}$. **(Жауабы: - 16,67.)**

3.19. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^4-1}$. **(Жауабы: 0,02.)**

3.20. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{xdx}{x^3-1}$. **(Жауабы: 0,37.)**

3.21. $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2-x+1} dx.$ **(Жауабы: 2,27.)**

3.22. $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2(x-1)}$. **(Жауабы: 0,01.)**

3.23. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$. **(Жауабы: 0,23.)**

3.24. $\int\limits_{7}^{9} \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4} dx.$ **(Жауабы: 0,04.)**

3.25. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^3-6x^2+x-6}$. **(Жауабы: 0,14.)**

3.26. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3+1}$. **(Жауабы: 0,25.)**

3.27. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4} dx$. **(Жауабы: 1,44.)**

3.28. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2} dx.$ **(Жауабы: - 0,12.)**

3.29. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} dx.$ **(Жауабы: 0,35.)**

3.30. $\int_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^4-1}$. **(Жауабы: - 0,08.)**

4.

4.1. $\int_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx.$ **(Жауабы: 3,14.)**

4.2. $\int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx.$ **(Жауабы: - 0,47.)**

4.3. $\int_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx.$ **(Жауабы: 0,02.)**

4.4. $\int_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}dx.$ **(Жауабы: 1,91.)**

4.5. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$. **(Жауабы: 1,02.)**

4.6. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx$. **(Жауабы: 2,36.)**

4.7. $\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$. **(Жауабы: 31,79.)**

4.8. $\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx.$ **(Жауабы: 0,53.)**

4.9. $\int_{0}^{1} \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}dx.$ **(Жауабы: 0,59.)**

4.10. $\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$. **(Жауабы: - 0,62.)**

4.11. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$ **(Жауабы: 0,68.)**

4.12. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$ **(Жауабы: 0,17.)**

4.13. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx.$ **(Жауабы: 1,29.)**

4.14. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}\,.$ **(Жауабы: 0,14.)**

4.15. $\int\limits_{2\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$ **(Жауабы: 0,04.)**

4.16. $\int\limits_{1\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$ **(Жауабы: 0,59.)**

4.17. $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx.$ **(Жауабы: 0,26.)**

4.18. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2}}.$ **(Жауабы: 0,08.)**

4.19. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx.$ **(Жауабы: 0,68.)**

4.20. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.$ **(Жауабы: 1,16.)**

4.21. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2,5}} \frac{dx}{\left(5-x^2\right)^3}.$ **(Жауабы: 0,20.)**

4.22. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. **(Жауабы: - 0,20.)**

4.23. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$. **(Жауабы: 0,05.)**

4.24. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}\,dx.$ **(Жауабы: 0,11.)**

4.25. $\int\limits_{0}^{\sqrt{7/3}} x^3\sqrt{7+x^2}\,dx.$ **(Жауабы: – 502,09.)**

4.26. $\int\limits_{4\sqrt{2/3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\,dx.$ **(Жауабы: 0,01.)**

4.27. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. **(Жауабы: 0,29.)**

4.28. $\int\limits_{0}^{3} x^4\sqrt{9-x^2}\,dx.$ **(Жауабы: 71,53.)**

4.29. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}}$. **(Жауабы: 5,31.)**

4.30. $\int\limits_{0}^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2}\,dx.$ **(Жауабы: 4,71.)**

5.

5.1. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$ **(Жауабы: - 0,09.)**

5.2. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}.$ **(Жауабы: 0,60.)**

5.3. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin^3 2x\,dx.$ **(Жауабы: 0,33.)**

5.4. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2}\,dx.$ **(Жауабы: 1,18.)**

5.5. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x\,dx.$ **(Жауабы: 0,39.)**

5.6. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2\, x\,dx.$ **(Жауабы: 0,68.)**

5.7. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx.$ **(Жауабы: 0,38.)**

5.8. $\int\limits_{0}^{\pi/4} 2\cos x \sin 3x\,dx.$ **(Жауабы: 1,00.)**

5.9. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx.$ **(Жауабы: 1,80.)**

5.10. $\int\limits_{0}^{\pi/32} \left(32\cos^2 4x - 16\right) dx.$ **(Жауабы: 1,41.)**

5.11. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x+1}\,dx.$ **(Жауабы: 0,785.)**

5.12. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{tg}^4\, \varphi\, d\varphi.$ **(Жауабы: 0,93.)**

5.13. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx.$ **(Жауабы: 0.)**

5.14. $\int_0^{\pi/4} \sin 3x\cos 5x\,dx.$ **(Жауабы: - 0,25.)**

5.15. $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$ **(Жауабы: 1,33.)**

5.16. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}.$ **(Жауабы: 0,55.)**

5.17. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$ **(Жауабы: 0,81.)**

5.18. $\int_0^{\pi/2} \cos x\cos 3x\cos 5x\,dx.$ **(Жауабы: 0,16.)**

5.19. $\int_0^{\pi} \cos^4 x\sin^2 x\,dx.$ **(Жауабы: 0,20.)**

5.20. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx.$ **(Жауабы: 0,49.)**

5.21. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx.$ **(Жауабы: 2,00.)**

5.22. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx.$ **(Жауабы: 0,38.)**

5.23. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx.$ **(Жауабы: 1,69.)**

5.24. $\int_0^{\pi/8} \sin x\sin 3x\,dx.$ **(Жауабы: 0,05.)**

5.25. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx.$ **(Жауабы: - 0,21.)**

5.26. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$ **(Жауабы: 0,55.)**

5.27. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^5 x\, dx.$ **(Жауабы: 0,53.)**

5.28. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x\, dx.$ **(Жауабы: 0,10.)**

5.29. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}.$ **(Жауабы: 0,60.)**

5.30. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2}\, dx.$ **(Жауабы: 1,18.)**

6.

6.1. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}.$ **(Жауабы: 0,06.)**

6.2. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}.$ **(Жауабы: 1,10.)**

6.3. $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}.$ **(Жауабы: - 0,14.)**

6.4. $\int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \frac{x^2 dx}{13 - 6x^3 + x^6}.$ **(Жауабы: 0,26.)**

6.5. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2 + x}.$ **(Жауабы: 0,29.)**

6.6. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}.$ **(Жауабы: 0,20.)**

6.7. $\int\limits_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$ **(Жауабы: 0,52.)**

6.8. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{t^2+5t+4}.$ **(Жауабы: 0,07.)**

6.9. $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{x^2+3x+2}.$ **(Жауабы: 0,28.)**

6.10. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x-5}{x^2-2x+2}.$ **(Жауабы: -2,79.)**

6.11. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ **(Жауабы: 0,39.)**

6.12. $\int\limits_{6}^{8} \frac{dx}{x^2+2x}.$ **(Жауабы: 0,03.)**

6.13. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ **(Жауабы: 1,57.)**

6.14. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$ **(Жауабы: 3,99.)**

6.15. $\int\limits_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$ **(Жауабы: 1,11.)**

6.16. $\int\limits_{1/6}^{2} \frac{dx}{3x^2-x+1}.$ **(Жауабы: 0,77.)**

6.17. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}.$ **(Жауабы: 9,35.)**

6.18. $\int\limits_{3,5}^{5} \frac{xdx}{x^2-7x+13}.$ **(Жауабы: 4,94.)**

6.19. $\int_{2}^{3} \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx.$ **(Жауабы: 3,19.)**

6.20. $\int_{-3/2}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx.$ **(Жауабы: 2,41.)**

6.21. $\int_{4}^{5} \frac{xdx}{x^4-4x^2+3}.$ **(Жауабы: 0,02.)**

6.22. $\int_{-1/2}^{1} \frac{x^3dx}{x^2+x+1}.$ **(Жауабы: 0,08.)**

6.23. $\int_{7}^{10} \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}.$ **(Жауабы: 38,67.)**

6.24. $\int_{3}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{8x-x^2-15}}.$ **(Жауабы: 51,81.)**

6.25. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}.$ **(Жауабы: 0,14.)**

6.26. $\int_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$ **(Жауабы: 0,21.)**

6.27. $\int_{4}^{7} \frac{dx}{x^2+3x-10}.$ **(Жауабы: 0,09.)**

6.28. $\int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$ **(Жауабы: 0,52.)**

6.29. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$ **(Жауабы: 1,57.)**

6.30. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+3}.$ **(Жауабы: 0,61.)**

7.

7.1. $\int_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx.$ **(Жауабы: 16,16.)**

7.2. $\int_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\left(3+e^{-x}\right)}.$ **(Жауабы: 0,13.)**

7.3. $\int_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$ **(Жауабы: 0,94.)**

7.4. $\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$ **(Жауабы: 11,77.)**

7.5. $\int_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}\ .$ **(Жауабы: 10,67.)**

7.6. $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$ **(Жауабы: 0,86.)**

7.7. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}.$ **(Жауабы: 0,41.)**

7.8. $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$ **(Жауабы: 0,43.)**

7.9. $\int_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}\ .$ **(Жауабы: 4,67.)**

7.10. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}\ .$ **(Жауабы: 1,31.)**

7.11. $\int_{2/3}^{7/3} \frac{xdx}{\sqrt{2+3x}}\ .$ **(Жауабы: 0,96.)**

7.12. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$ **(Жауабы: 0,20.)**

7.13. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x)^4}$. **(Жауабы: 0,04.)**

7.14. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **(Жауабы: 0,58.)**

7.15. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$. **(Жауабы: 0,20.)**

7.16. $\int\limits_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{z^2dz}{\sqrt{9+z^3}}$. **(Жауабы: 0,67.)**

7.17. $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. **(Жауабы: 4,00.)**

7.18. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. **(Жауабы: 0,52.)**

7.19. $\int\limits_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx.$ **(Жауабы: 0,29.)**

7.20. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos y\,dy}{4+\sqrt{\sin y}}$. **(Жауабы: 0,22.)**

7.21. $\int\limits_2^5 \frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$. **(Жауабы: 8,44.)**

7.22. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$. **(Жауабы: 1,05.)**

7.23. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. **(Жауабы: 2,00.)**

7.24. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. **(Жауабы: 0,22.)**

7.25. $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\,dx.$ **(Жауабы: - 0,49.)**

7.26. $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx.$ **(Жауабы: 8,39.)**

7.27. $\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}\,.$ **(Жауабы: 22,88.)**

7.28. $\int_{0}^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx.$ **(Жауабы: 38,06.)**

7.29. $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}.$ **(Жауабы: 0,26.)**

7.30. $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$ **(Жауабы: 0,17.)**

8.
Жинақты меншіксіз интегралды есептеу керек

8.1. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1};$ **б)** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$

8.2. а) $\int_{1}^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1};$ **б)** $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}.$

8.3. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}};$ **б)** $\int_{0}^{1/3} \frac{e^3+\frac{1}{x}}{x^2}\,dx.$

8.4. а) $\int_{1}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}};$ **б)** $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(3-x\right)^5}}.$

8.5. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ **б)** $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}\,dx.$

8.6. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}};$ **б)** $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}.$

8.7. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{\left(16+x^2\right)^5}};$ **б)** $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\ln 2\,dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$

8.8. а) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}};$ **б)** $\int\limits_{0}^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}\,dx.$

8.9. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi\left(x^2+4x+5\right)};$ **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{1-x^4}.$

8.10. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5};$ **б)** $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}\,dx.$

8.11. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi\left(1+4x^2\right)}\,dx;$ **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}.$

8.12. а) $\int\limits_{1/2}^{\infty} \frac{16dx}{\pi\left(4x^2+4x+5\right)};$ **б)** $\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$

8.13. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5};$ **б)** $\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$

8.14. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+4x+1\right)^4}}\,dx;$ **б)** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{e^{tgx}}{\cos 2x}\,dx.$

8.15. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}\,dx;$ **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{2e^{1-(2/\pi)\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

8.16. а) $\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx;$ **б)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-4}}.$

8.17. а) $\int\limits_1^\infty \frac{4dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)};$ **б)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$

8.18. а) $\int\limits_0^\infty x\sin x\,dx;$ **б)** $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$

8.19. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{\left(x^2-4x\right)\ln 5};$ **б)** $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3\ln 2}}.$

8.20. а) $\int\limits_{1/3}^\infty \frac{\pi dx}{\left(1+9x^2\right)\operatorname{arctg}^2 3x};$ **б)** $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}.$

8.21. а) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{\pi\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}};$ **б)** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}.$

8.22. а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\left(x^2+2x\right)\ln^3 x};$ **б)** $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt[3]{9}xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$

8.23. а) $\int\limits_0^\infty e^{-3x}x\,dx;$ **б)** $\int\limits_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$

8.24. а) $\int\limits_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx;$ **б)** $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}.$

8.25. а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{2x^2-2x+1};$ **б)** $\int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$

8.26. а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)};$ **б)** $\int\limits_1^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{31\left(x^3-1\right)}}.$

8.27. а) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; б) $\int\limits_{1}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

8.28. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}}$; б) $\int\limits_{0}^{4} \frac{10x\,dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$.

8.29. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$; б) $\int\limits_{0}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

8.30. а) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

8.1-ҮТ шығару үлгісі

Анықталған интегралды үтірден кейінгі екі белгіге дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

1. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x(1+x^2)}$.

► Интеграл астындағы рационал бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейміз (6.2.3 п.), содан соң анықталған интегралдарға Ньютон-Лейбниц формуласын: $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b)-F(a)$ қолданып есептейміз:

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int\limits_{1}^{2}\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}\right)dx = \left|\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{1 = A(1+x^2)+(Bx+C)x,} \\ x=0 & \left|\begin{array}{l} 1=A, \\ 0=A+B, \\ 0=C, \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=1, \\ B=-1, \\ C=0 \end{array} \\ x^2 & & \\ x & & \end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x} - \int\limits_{1}^{2}\frac{x\,dx}{1+x^2} = \ln|x|\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2 =$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5=\frac{3}{2}\cdot 0,69-\frac{1}{2}\cdot 1,61=0,24.$$

◄

2. $\int\limits_1^e \ln^2 x dx.$

► Бөліктеп интегралдау әдісін (8.1.4 п., (12)-формула) екі рет қолданып табамыз:

$$\int\limits_1^e \ln^2 x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x,\, du=2\ln x\frac{1}{x}dx, \\ dv=dx,\, v=x \end{matrix}\right|=x\ln^2 x\Big|_1^e-$$

$$-2\int\limits_1^e \ln x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x,\;\; du=\frac{1}{x}dx, \\ dv=dx,\;\; v=x \end{matrix}\right|=$$

$$=e\ln^2 e-2\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=e-2e+2e-2=0,72.$$ ◄

3. $\int\limits_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx.$

► Рационал бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосын-дысына жіктейміз (6.2.3 п.):

$$\int\limits_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx=\int\limits_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)}dx=$$

$$=\int\limits_3^4\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}9x^2-14x+1=A(x-1)(x-2)+\\ +B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1),\\ \left.\begin{array}{l|l} x=-1 & 24=\ \ 6A,\\ x=\ \ 1 & -4=-2B,\\ x=\ \ 2 & 9=\ \ 3C,\end{array}\right\}\quad A=4, B=2, C=3\end{array}\right|=$$

$$=\int_3^4\left(\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx=\left(4\ln|x+1|+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|\right)\Big|_3^4=$$

$$=4\ln 5+2\ln 3+3\ln 2-4\ln 4-2\ln 2=$$

$$=\ln\left(5^4\cdot 3^2\cdot 2\right)-\ln 4^4=\ln\frac{5^4\cdot 3^2\cdot 2}{4^4}=\ln\frac{11250}{256}=3,78.\quad ◄$$

4. $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

► $$\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}=\left|\begin{array}{c}\sqrt{x^2+1}=t,\ x^2+1=t^2,\ xdx=tdt,\\ t=1,\quad x=0,\ t=\sqrt{2},\quad x=1\end{array}\right|=$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\left(t^2-1\right)t}{t}dt=\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=0,20.$$

◄

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}.$

► Интеграл астында $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты жұп рационал функция тұрғандықтан, $t=\operatorname{tg}x$ алмастыруын пайда-ланамыз (§ 7.3):

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=$$

$$=\left|\begin{array}{c} t=\operatorname{tg}x,\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2},\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, \\ t=0,\quad x=0,\ t=1,\quad x=\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(4-\dfrac{3}{1+t^2}+\dfrac{5t^2}{1+t^2}\right)}=\int_0^1\frac{dt}{9t^2+1}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3t\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}0\right)=0,42. \qquad ◄$$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

► Мұнда 7.2.1 п. б) $k=1$ үшін қарастырылған мысалдағы әдіс қолданылады (сол пункттегі ескертуді қараңыз):

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx-13\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{4-\left(x+1\right)^2}}=$$

$$=-2\sqrt{3-2x-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\ 13\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=0,82-11,04+\frac{13}{6}\pi\approx-3,42.$$

◄

$$\textbf{7.}\qquad \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}.$$

► Мұнда $\sqrt{3x-1}=t$ алмастыруын қолдануға болады:

$$\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{3x-1}=t,\ 3x-1=t^2,\ x=\frac{1}{3}\left(t^2+1\right),\ dx=\frac{2}{3}tdt, \\ t=1,\quad x=\frac{2}{3},\ t=3,\quad x=\frac{10}{3} \end{array} \right| =$$

$$=\int_1^3 \frac{\frac{1}{3}\left(t^2+1\right)\cdot\frac{2}{3}tdt}{t^2 t} = \frac{2}{9}\int_1^3 \frac{t^3+t}{t^3}dt = \frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^3 \approx 0,59. \quad ◄$$

8. Меншіксіз интегралдарды есептеу керек немесе олардың жинақсыздығын дәлелдеу керек:

$$\text{а)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}; \qquad\qquad \text{б)}\ \int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$$

► Меншіксіз интегралды ерекшелігі жалғыз нүктеде болатын меншіксіз интегралдардың қосындысына келтіреміз (8.2.3 п., анықтаманы және 10, 11 – мысалдарды қараңыз) және есептейміз:

$$\text{а)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \lim_{\beta\to\infty}\int_{0}^{\beta} \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{\alpha}^{0} + \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{0}^{\beta} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+2}{\sqrt{5}}\right) +$$

$$+\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\beta+2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{\sqrt{5}};$$

б) $$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx+\int_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=$$

$$=\lim_{\beta\to 0-}\int_{-1}^{\beta}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx+\lim_{\alpha\to 0+}\int_{\alpha}^{0}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=\lim_{\beta\to 0-}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^{\beta}+\lim_{\alpha\to 0+}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{\alpha}^{1}=$$

$$=\lim_{\beta\to 0-}\left(\frac{9}{7}\beta^{\frac{7}{3}}+6\beta^{\frac{1}{3}}+\frac{9}{7}+6\right)+\lim_{\alpha\to 0+}\left(\frac{9}{7}+6-\frac{9}{7}\alpha^{\frac{7}{3}}-6\alpha^{\frac{1}{3}}\right)=14\frac{4}{7}.\quad\blacktriangleleft$$

8.2-ҮТ

1. Берілген сызықтармен шенелген фигура ауданын (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеңіз

1.1. $\rho=3\sqrt{\cos 2\varphi}.$ **(Жауабы:** 9,00.**)**

1.2. $y=x^2, y=3-2x.$ **(Жауабы:** 10,67.**)**

1.3. $y=\sqrt{x}, y=x^3.$ **(Жауабы:** 0,42.**)**

1.4. $x=7\cos^3 t, y=7\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 57,70.**)**

1.5. $\rho=4\cos 3\varphi.$ **(Жауабы:** 12,56.**)**

1.6. $\rho=3\cos 2\varphi.$ **(Жауабы:** 14,13.**)**

1.7. $\rho=2(1-\cos\varphi).$ **(Жауабы:** 18,84.**)**

1.8. $\rho^2 = 2\sin 2\varphi.$ **(Жауабы:** 2,00.**)**

1.9. $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t).$ **(Жауабы:** 150,72.**)**

1.10. $\rho = 2(1 + \cos\varphi).$ **(Жауабы:** 18,84.**)**

1.11. $\rho = 2\sin 3\varphi.$ **(Жауабы:** 3,14.**)**

1.12. $\rho = 2 + \cos\varphi.$ **(Жауабы:** 14,13.**)**

1.13. $y = 1/\left(1 + x^2\right), \quad y = x^2/2.$ **(Жауабы:** 1,23.**)**

1.14. $y^2 = x + 1, \quad y^2 = 9 - x.$ **(Жауабы:** 29,87.**)**

1.15. $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 4.$ **(Жауабы:** 6,05.**)**

1.16. $\rho = 4\sin^2\varphi.$ **(Жауабы:** 18,84.**)**

1.17. $x = 3\cos t, \quad y = 2\sin t.$ **(Жауабы:** 18,84.**)**

1.18. $y^2 = 9x, y = 3x.$ **(Жауабы:** 0,50.**)**

1.19. $x = 3(\cos t + t\sin t), \quad y = 3(\sin t - t\cos t),$

$y = 0 \quad (0 \le t \le \pi).$ **(Жауабы:** 29,25.**)**

1.20. $y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y.$ **(Жауабы:** 5,33.**)**

1.21. $y^2 = x^3, \quad x = 2.$ **(Жауабы:** 4,51.**)**

1.22. $y = x^2, \quad y = 2 - x^2.$ **(Жауабы:** 2,67.**)**

1.23. $y^2 = (4 - x)^3, \quad x = 0.$ **(Жауабы:** 25,60.**)**

1.24. $\rho = 3\sin 4\varphi.$ **(Жауабы:** 14,13.**)**

1.25. $y = x^3, \quad y = 1, \quad x = 0.$ **(Жауабы:** 0,75.**)**

1.26. $xy = 6, \quad x + y - 7 = 0.$ **(Жауабы:** 6,76.**)**

1.27. $y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0, \quad x = 2.$ **(Жауабы:** 3,02.**)**

1.28. $x^2 = 4y, \quad y = 8/\left(x^2 + 4\right).$ **(Жауабы:** 4,95.**)**

1.29. $y = x + 1, \quad y = \cos x, \quad y = 0.$ **(Жауабы:** 1,50.**)**

1.30. $x=2\cos^3 t,\quad y=2\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 4,71.**)**

2. Берілген сызық доғасының ұзындығын (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеңіз

2.1. $x=2\cos^3 t,\ \ y=2\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 12,00.**)**

2.2. $x=2(\cos t+t\sin t),\ \ y=2(\sin t-t\cos t)\quad (0\le t\le\pi).$

(Жауабы: 9,86.**)**

2.3. $\rho=\sin^3(\varphi/3)\quad (0\le\varphi\le\pi/2).$ **(Жауабы:** 0,14.**)**

2.4. $\rho=2\sin^3(\varphi/3)\quad (0\le\varphi\le\pi/2).$ **(Жауабы:** 0,27.**)**

2.5. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{9}.$ **(Жауабы:** 18,00.**)**

2.6. $x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}.$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.7. $y^2=(x+1)^3$ сызығының $x=4$ түзуімен қиылған бөлігі

(Жауабы: 24,81.**)**

2.8. $y=1-\ln\cos x\quad (0\le x\le\pi/6).$ **(Жауабы:** 0,55.**)**

2.9. $\rho=6\cos^3(\varphi/3)\quad (0\le\varphi\le\pi/2).$ **(Жауабы:** 8,60.**)**

2.10. $x=4\cos^3 t,\ \ y=4\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.11. $y^2=(x-1)^3$**,** $A(1,0)$**,** $B\left(6,\sqrt{125}\right).$ **(Жауабы:** 12,41.**)**

2.12. $y^2=x^5$ сызығының $x=5$ түзуімен қиылған бөлігі

(Жауабы: 24,81.**)**

2.13. $\rho=3\cos\varphi.$ **(Жауабы:** 9,42.**)**

2.14. $\rho=3(1-\cos\varphi).$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.15. $\rho=2\cos^3(\varphi/3).$ **(Жауабы:** 9,42.**)**

2.16. $x=5\cos^2 t,\ \ y=5\sin^2 t\ (0\le t\le\pi/2).$ **(Жауабы:** 7,05.**)**

2.17. $9y^2 = 4(3-x)^3$ сызығының *Oy* өсімен қиылысу нүктелерінің арасы **(Жауабы:** 9,33.**)**

2.18. $\rho = 3\sin\varphi.$ **(Жауабы:** 9,42.**)**

2.19. $y = \ln\sin x. \quad (\pi/3 \le x \le \pi/2).$ **(Жауабы:** 0,55.**)**

2.20. $x = 9(t-\sin t),\ y = 9(1-\cos t)\ (0 \le t \le 2\pi).$ **(Жауабы:** 72,00.**)**

2.21. $\rho = 2(1-\cos\varphi).$ **(Жауабы:** 16,00.**)**

2.22. $y^2 = (x-1)^3$ сызығының $A(2,-1)$ нүктеден $B(5,-8)$ нүктеге дейінгі бөлігі **(Жауабы:** 7,63.**)**

2.23. $x = 7(t-\sin t), y = 7(1-\cos t)\ (2\pi \le t \le 4\pi).$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.24. $y = e^{x/2} + e^{-x/2} \quad (0 \le x \le 2).$ **(Жауабы:** 2,35.**)**

2.25. $x = 4\cos^3 t, y = 4\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.26. $x = \sqrt{3}t^2,\ y = t - t^3.$ **(Жауабы:** 4,00.**)**

2.27. $\rho = 5\sin\varphi.$ **(Жауабы:** 15,70.**)**

2.28. $\rho = 4\cos\varphi.$ **(Жауабы:** 12,56.**)**

2.29. $\rho = 5(1+\cos\varphi).$ **(Жауабы:** 40,00.**)**

2.30. $y^2 = x^3, \quad A(0,0), \quad B(4,8).$ **(Жауабы:** 9,07.**)**

3. Ф-фигурасының көрсетілген координат өсін айналуынан алынған дененің көлемін (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеңіз

3.1. $\Phi: y^2 = 4 - x,\ x = 0,\ Oy.$ **(Жауабы:** 107,17.**)**

3.2. $\Phi: \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}, \quad x = 0, \ \ y = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 1,68.**)**

3.3. $\Phi: x^2/9 + y^2/4 = 1, Oy.$ **(Жауабы:** 150,72.**)**

3.4. $\Phi: y^3 = x^2, y = 1, Ox.$ **(Жауабы:** 3,59.**)**

3.5. $\Phi: x = 6(t-\sin t), y = 6(1-\cos t), Ox.$ **(Жауабы:** 1064,88.**)**

3.6. $\Phi: x=3\cos^2 t, y=4\sin^2 t \ \left(0\le t\le \pi/2\right), Oy.$ **(Жауабы:** 37,68.**)**

3.7. $\Phi: y^2=x, x^2=y, Ox.$ **(Жауабы:** 0,94.**)**

3.8. $\Phi: y^2=\left(x-1\right)^3, x=2, Ox.$ **(Жауабы:** 0,78.**)**

3.9. $\Phi: x=\sqrt{1-y^2}, y=\sqrt{\dfrac{3}{2}x}, y=0, Ox.$ **(Жауабы:** 1,24.**)**

3.10. $\Phi: y=\sin x, y=0, \left(0\le x\le \pi\right), Ox.$ **(Жауабы:** 4,93.**)**

3.11. $\Phi: y^2=4x, x^2=4y, Ox.$ **(Жауабы:** 60,29.**)**

3.12. $\Phi: x=2\cos t, y=5\sin t, Oy.$ **(Жауабы:** 83,73.**)**

3.13. $\Phi: y=x^2, 8x=y^2, Oy.$ **(Жауабы:** 15,07.**)**

3.14. $\Phi: y=e^x, x=0, y=0, x=1, Ox.$ **(Жауабы:** 10,05.**)**

3.15. $\Phi: y^2=4x/3, x=3, Oy.$ **(Жауабы:** 90,43.**)**

3.16. $\Phi: y=2x-x^2, y=0, Ox.$ **(Жауабы:** 3,35.**)**

3.17. $\Phi: \rho=2\left(1+\cos\varphi\right),$ **(Жауабы:** 66,99.**)**

3.18. $\Phi: x=7\cos^3 t, y=7\sin^3 t, Oy.$ **(Жауабы:** 328,23.**)**

3.19. $\Phi: x^2/16+y^2/1=1, Ox.$ **(Жауабы:** 16,75.**)**

3.20. $\Phi: x^3=\left(y-1\right)^2, x=0, y=0, Ox.$ **(Жауабы:** 6,44.**)**

3.21. $\Phi: xy=4, 2x+y-6=0, Ox.$ **(Жауабы:** 4,19.**)**

3.22. $\Phi: x=\sqrt{3}\cos t, y=2\sin t, Oy.$ **(Жауабы:** 25,12.**)**

3.23. $\Phi: y=2-x^2, y=x^2, Ox.$ **(Жауабы:** 16,75.**)**

3.24. $\Phi: y=-x^2+8, y=x^2, Ox.$ **(Жауабы:** 535,89.**)**

3.25. $\Phi: y^2=\left(x+4\right)^3, x=0, Ox.$ **(Жауабы:** 200,96.**)**

3.26. $\Phi: y=x^3, x=0, y=8, Oy.$ **(Жауабы:** 60,29.**)**

3.27. $\Phi: x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, Ox.$ **(Жауабы:** 0,96.**)**

3.28. $\Phi : 2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0,\ Ox.$ **(Жауабы:** 57,10.**)**

3.29. $\Phi : y = x - x^2,\ y = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 0,10.**)**

3.30. $\Phi : y = 2 - x^2/2,\ x + y = 2,\ Oy.$ **(Жауабы:** 4,17.**)**

4. *L*-қисық доғасының көрсетілген координат өсін айналудан алынған беттің ауданын (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеңіз

4.1. $L : y = x^3/3 \quad \left(-1/2 \le x \le 1/2\right), Ox.$ **(Жауабы:** 4,25.**)**

4.2. $L : \rho = 2\cos\varphi,$ поляр өсі. **(Жауабы:** 12,57.**)**

4.3. $L : x = 10\left(t - \sin t\right),\ y = 10\left(1 - \cos t\right) \quad \left(0 \le t \le 2\pi\right),\ Ox.$

(Жауабы: 6698,67.**)**

4.4. $L : y = x^2/2$ сызығының $y = 3/2$ түзуімен қиылған бөлігі; $Oy.$

(Жауабы: 14,65.**)**

4.5. $L : 3y = x^3 \quad \left(0 \le x \le 2\right),\ Oy.$ **(Жауабы:** 24,09.**)**

4.6. $L : y = \sqrt{x}, \quad y = x, Ox.$ **(Жауабы:** 5,34.**)**

4.7. $L : x = 2\left(t - \sin t\right), y = 2\left(1 - \cos t\right) \ \left(0 \le t \le 2\pi\right), Ox.$

(Жауабы: 267,95.**)**

4.8. $L : x = \cos t,\ y = 3 + \sin t,\ Ox.$ **(Жауабы:** 118,32.**)**

4.9. $L : 3x = y^3 \quad \left(0 \le y \le 2\right), Oy.$ **(Жауабы:** 24,09.**)**

4.10. $L : y = x^3/3 \ \left(-1 \le x \le 1\right),\ Ox.$ **(Жауабы:** 1,27.**)**

4.11. $L : x = \cos t,\ y = 1 + \sin t,\ Ox.$ **(Жауабы:** 32,28.**)**

4.12. $L : x^2 = 4 + y$ сызығының $y = 2$ түзуімен қиылған бөлігі; $Oy.$

(Жауабы: 64,89.**)**

4.13. $L : x = 3\left(t - \sin t\right), y = 3\left(1 - \cos t\right) \ \left(0 \le t \le 2\pi\right),\ Ox.$

(Жауабы: 602,88.**)**

4.14. $L : x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ Ox.$ **(Жауабы:** 7,54.**)**

4.15. $L: \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, поляр өсі. **(Жауабы:** 14,82.**)**

4.16. $L: y^2 = 4 + x$ сызығының $x = 2$ түзуімен қиылған бөлігі; Ox. **(Жауабы:** 64,89.**)**

4.17. $L: y^2 = 2x$ сызығының $2x = 3$ түзуімен қиылған бөлігі; Ox. **(Жауабы:** 16,65.**)**

4.18. $L: 3y = x^3 \quad (0 \le x \le 1), Ox$. **(Жауабы:** 0,63.**)**

4.19. $L: \rho^2 = 4\cos 2\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 14,80.**)**

4.20. $L: \rho = 6\sin\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 354,96.**)**

4.21. $L: x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t \quad (0 \le t \le 2\pi), Ox$. **(Жауабы:** 66,99.**)**

4.22. $L: \rho = 2\sin\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 39,44.**)**

4.23. $L: \rho = \dfrac{3}{2}\cos\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 7,07.**)**

4.24. $L: x = 3\cos^3 t,\ y = 3\sin^3 t,\ Ox$. **(Жауабы:** 67,82.**)**

4.25. $L: x = 2\cos t,\ y = 3 + 2\sin t,\ Ox$. **(Жауабы:** 236,64.**)**

4.26. $L: \rho^2 = 9\cos 2\varphi$, поляр өсі **.** **(Жауабы:** $2 \cdot 16{,}38$.**)**

4.27. $L: y = x^3$ сызығының $x = \pm 2/3$ түзулерінің арасындағы бөлігі; Ox. **(Жауабы:** 0,84.**)**

4.28. $L: x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t, \quad Ox$. **(Жауабы:** 30,14.**)**

4.29. $L: x = \cos t, y = 2 + \sin t, Ox$. **(Жауабы:** 77,88.**)**

4.30. $L: \rho = 4\sin\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 157,76.**)**

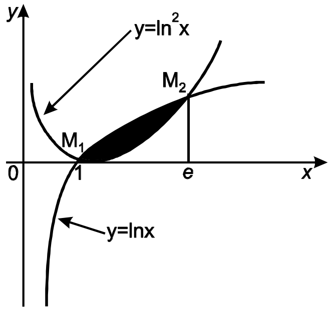
8.2-ҮТ шығару үлгісі

1. $y = \ln x$ және $y = \ln^2 x$ сызықтарымен шенелген фигураның (81-сурет) ауданын үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен табу керек.

► Қисықтардың қиылысу нүктелерін табамыз:

$$\begin{cases} y = \ln x, \\ y = \ln^2 x, \end{cases} \qquad \ln x = \ln^2 x, \qquad \ln x(\ln x - 1) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln x = 0, \\ \ln x - 1 = 0, \end{array}\right. \quad x_1 = 1,\ y_1 = \ln 1 = 0, \quad x_2 = e; \quad y_2 = \ln e = 1;$$



81-сурет

Сонымен қиылысу нүктелері: $M_1(1,0)$, $M_2(e,1)$. Енді 7.3.2 п., (3)-формуланы пайдаланып табамыз:

$$S = \int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right) dx,$$

$$\int \ln^2 x dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, du = 2\ln x \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx,$$

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

$$S = \int_1^e \ln x dx - \int_1^e \ln^2 x dx = \left(x\ln x - x\right)\Big|_1^e - \left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right)\Big|_1^e =$$

$$= e\ln e - e + 1 - \left(e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e\right) + 2 = 3 - e \approx 0,28. \quad \blacktriangleleft$$

2. Берілген сызықтың ұзындығын үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен есептеу керек:

$$x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t,\;\; y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t \quad \left(0\le t\le \pi\right)$$

► 8.3.1п., (7') формуласын $\varphi'\left(t\right)=\dfrac{dx}{dt},\quad \psi'\left(t\right)=\dfrac{dy}{dt},\;\; a=t_1,\quad b=t_2$ арқылы белгілеп алып пайдаланамыз:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

$$\frac{dx}{dt}=2t\sin t+\left(t^2-2\right)\cos t+2\cos t-2t\sin t=t^2\cos t,$$

$$\frac{dy}{dt}=-2t\cos t-\left(2-t^2\right)\sin t+2\sin t+2t\cos t=t^2\sin t,$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t}=t^2.$$

$$l=\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}\approx 10,32. \qquad ◄$$

3. $y=3-x^2$ және $y=x^2+1$ параболаларымен шенелген жазық фигураның абсцисса өсін айналуынан шыққан дененің көлемін үтірден кейін екі мәнге дейінгі дәлдікпен табу керек.

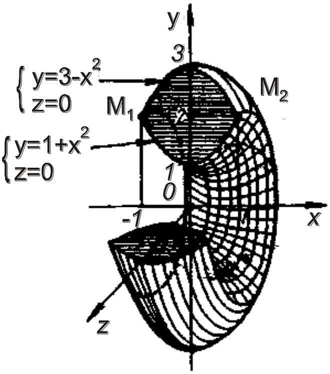
► Параболалардың қиылысу нүктелерін табамыз: $M_1\left(-1,2\right),\quad M_2\left(1,2\right)$. Берілген дененің көлемін V_1 және V_2 көлемдерінің айырымы ретінде аламыз. Ал V_1 және V_2 көлемдері 8.3.3 п., (6) формула бойынша табамыз:

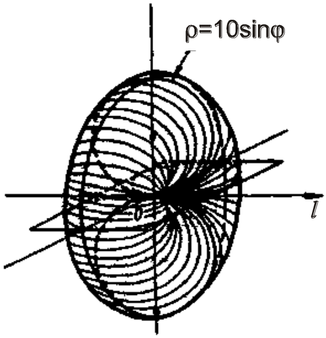
$$V_2=\pi\int_{-1}^{1}\left(3-x^2\right)dx, \qquad V_2=\pi\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)dx.$$

Сонымен (82-сурет);

$$V = V_2 - V_1 = \pi\int_{-1}^{1}\left(3-x^2\right)^2 dx - \pi\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^{1}\left(\left(3-x^2\right)^2 - \left(x^2+1\right)^2\right)dx =$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}\left(8-8x^2\right)dx = 8\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 16\pi\left(1-\frac{1}{3}\right) \approx 33,50.$$





82-сурет 83-сурет

4. $\rho = 10\sin\varphi$ шеңберінің Ol полярлық өсті айналуынан алынған беттің ауданын (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеу керек (83-сурет).

► Полярлық координаттар жүйесінде жазылған келесі формуланы пайдаланамыз:

$$S = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y\sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}\,d\varphi, \quad \text{мұнда } y = \rho\sin\varphi.$$

Есептейміз:

$$\rho'_\varphi = 10\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi = 10\sin^2\varphi, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi,$$

$$S = 2\pi\int_0^\pi 10\sin^2\varphi\sqrt{100\cos^2\varphi + 100\sin^2\varphi}\,d\varphi = 200\pi\int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$=200\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=100\pi\left(\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi}\approx 985{,}96.$$

8.3-ҮТ

1. *P* резервуарынан суды сорып шығаруға кететін жұмысты есептеу керек. Судың меншікті салмағы $9{,}81\ \frac{кН}{м^3}$, $\pi=3{,}14$. (Нәтижені бүтін бөлікке дейін дөңгелектеу керек).

1.1 *P*: табан қабырғасы 2 м және биіктігі 5 м дұрыс төртбұрышты пирамида.

(**Жауабы:** 254 кДж.)

1.2. *P*: төбесі төмен қараған дұрыс төртбұрышты пирамида. Пирамиданың табан қабырғасы 2 м, биіктігі 6 м.

(**Жауабы***:* 118 кДж.)

1.3. *P*: биіктігі 1,5 м және радиусы 1 м сфералық сегмент формасындағы қазан.

(**Жауабы:** 22 кДж.)

1.4. *P*: табан радиусы 1 м, ұзындығы 5 м жартылай цилиндр.

(**Жауабы:** 33 кДж.)

1.5. *P*: жоғарғы табан радиусы 1 м, төменгі табан радиусы 2 м, биіктігі 3 м қиық конус.

(**Жауабы:** 393 кДж.)

1.6. *P*: перпендикуляр қимасы парабола болатын (желоб) қауа. Оның ұзындығы 5 м, ені 4 м, тереңдігі 4 м.

(**Жауабы:** 837 кДж.)

1.7. *P*: табан радиусы 1 м, ұзындығы 5м, цилиндрлік цистерна.

(**Жауабы:**154 кДж.)

1.8. *P*: табаны 2 м және биіктігі 5 м дұрыс үшбұрышты пирамида.

(**Жауабы:** 106 кДж.)

1.9. *P*: төбесі төмен қараған, табан қабырғасы 4 м, биіктігі 6 м дұрыс үшбұрышты дұрыс пирамида.

(**Жауабы:** 204 кДж.)

1.10. *P*: төбесі төмен қараған табан радиусы 3 м, биіктігі 5 м конус.

(**Жауабы:** 578 кДж.)

1.11. *P*: жоғарғы табан радиусы 3 м, төменгі табан радиусы 1 м, биіктігі 3 м қиық конус.

(**Жауабы:** 416 кДж.)

1.12. *P*: табан радиусы 2 м және биіктігі 5 м конус.

(**Жауабы:** 770 кДж.)

1.13. *P*: жоғарғы табан қабырғасы 8 м, төменгі табан қабырғасы 4 м, биіктігі 2 м қиық конус.

(**Жауабы:** 576 кДж.)

1.14. *P*: табан радиусы 2 м, тереңдігі 4 м айналу параболоиды.

(**Жауабы:** 329 кДж.)

1.15. *P*: табан радиусы 1 м, тереңдігі 2 м айналу жарты эллипсоиды.

(**Жауабы:** 31 кДж.)

1.16. *P*: жоғарғы табан қабырғасы 2 м, төменгісі 4 м, биіктігі 1 м. дұрыс төртбұрышты пирамида.

(**Жауабы:** 56 кДж.)

1.17. табан қабырғасы 1 м және биіктігі 2 м дұрыс алтыбұрышты пирамида.

(**Жауабы:** 26 кДж.)

1.18. *P*: төбесі төмен қараған, табан қабырғасы 2 м, биіктігі 6 м, дұрыс алтыбұрышты пирамида.

(**Жауабы:** 306 кДж.)

1.19. *P*: табан радиусы 1 м және биіктігі 3 м цилиндр.

(**Жауабы:** 139 кДж.)

1.20. Жоғарғы табан қабырғасы 1 м, төменгісі 2 м, биіктігі 2 м дұрыс қиық алтыбұрышты пирамида.

(**Жауабы:** 144 кДж.)

1.21. *P*: перпендикуляр қимасында радиусы 1 м тең жарты шеңбер болатын (желоб) қауа. Оның ұзындығы 10 м.

(**Жауабы:** 65 кДж.)

1.22. *P*: жоғары табан қабырғасы 2 м, төменгісі 1 м, биіктігі 2 м дұрыс қиық алтыбұрышты пирамида.

(**Жауабы:** 93 кДж.)

1.23. *P*: радиусы 2 м жарты сфера.

(**Жауабы:** 123 кДж.)

Келесі есептерде ауырлық салмағы γ тең қандайда бір материалдан құралатын *Q* құрылысты салу кезіндегі ауырлық салмақты тоқтатуға жұмсалатын жұмысты есептеу керек (нәтижені бүтін бөлікке дейін дөңгелектеу керек).

1.24. *Q*: жоғарғы табан қабырғасы 2 м, төменгісі 4 м, биіктігі 2 м дұрыс қиық төртбұрышты пирамида; $\gamma = 24\,\frac{кН}{м^3}$.

(**Жауабы:** 352 кДж.)

1.25. *Q*: табан қабырғасы 1 м және биіктігі 2 м дұрыс алтыбұрышты пирамида; $\gamma = 24\,\frac{кН}{м^3}$.

(**Жауабы:** 21 кДж.)

1.26. *Q*: табан қабырғасы 2 м, биіктігі 4 м дұрыс төртбұрышты пирамида; $\gamma = 24\,\frac{кН}{м^3}$.

(**Жауабы:** 128 кДж.)

1.27. *Q*: жоғарғы табан қабырғасы 1 м, төменгісі 2 м, биіктігі 2 м дұрыс алтыбұрышты дұрыс пирамида; $\gamma = 24\,\frac{кН}{м^3}$.

(**Жауабы:** 229 кДж.)

1.28. *Q*: табан қабырғасы 3 м және биіктігі 6 м дұрыс үшбұрышты пирамида; $\gamma = 20\,\frac{кН}{м^3}$.

(**Жауабы:** 234 кДж.)

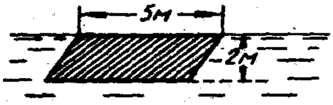
1.29. *Q*: табан радиусы 2 м, биіктігі 3 м конус; $\gamma = 20\,\frac{кН}{м^3}$.

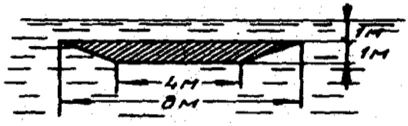
(**Жауабы:** 188 кДж.)

1.30. *Q*: жоғарғы табан радиусы 1 м, төменгісі 2 м, биіктігі 2 м қисық конус; $\gamma = 21\,\frac{кН}{м^3}$.

(**Жауабы:** 88 кДж.)

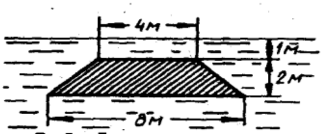
2. Суға вертикаль батырылған пластинаға түсетін судың қысым күшін есептеу керек. Судың меншікті салмағы $9{,}81\,\frac{кН}{м^3}$. (Нәтижені бүтін бөлікке дейін дөңгелектеу керек). Пластинаның формасы, өлшемдері және орналасуы суретте көрсетілген.

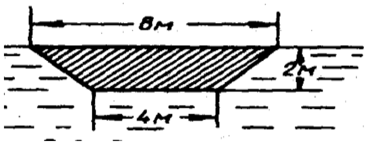




84-сурет

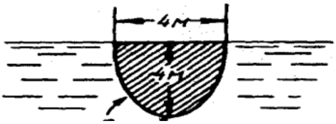
85-сурет

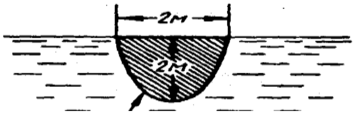




86-сурет

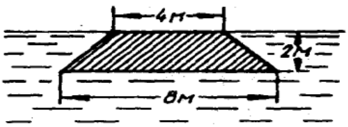
87-сурет

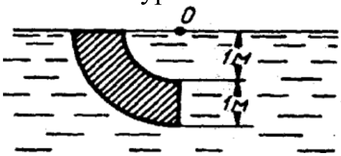




88-сурет

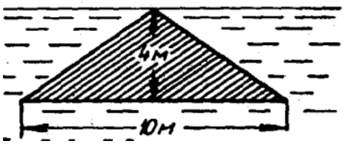
89-сурет





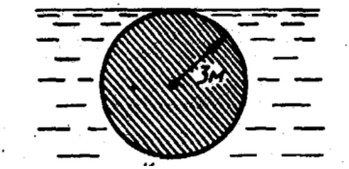
90-сурет

91-сурет

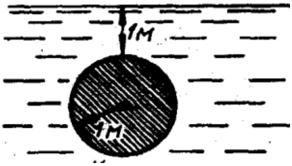


92-сурет

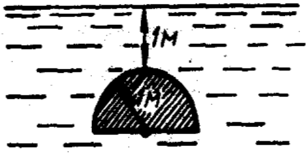
93-сурет



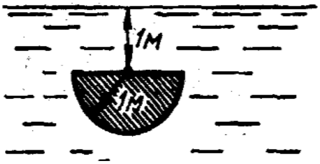
94-сурет



95-сурет

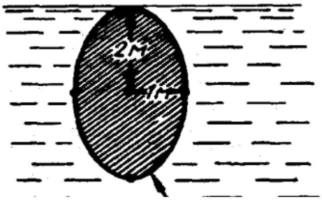


96-сурет

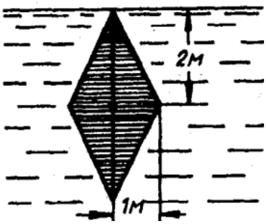


97-сурет

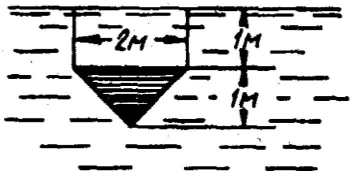
98-сурет



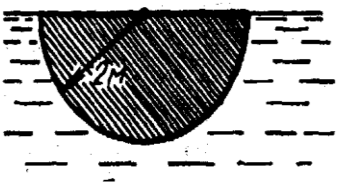
99-сурет



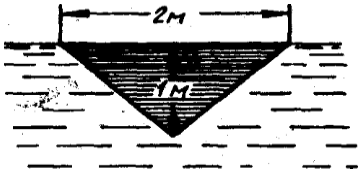
100-сурет



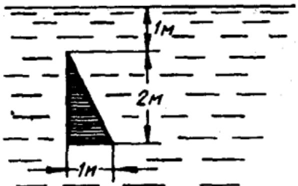
101-сурет



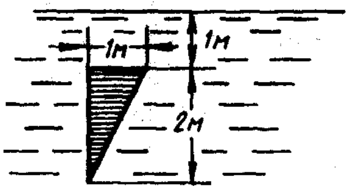
102-сурет



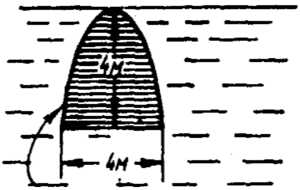
103-сурет



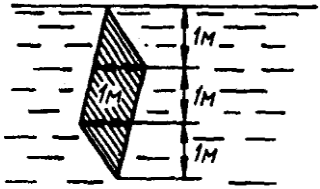
Тік бұрышты үшбұрыш
104-сурет



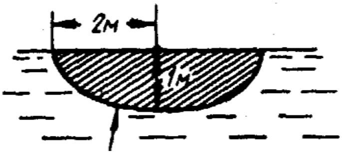
Тік бұрышты үшбұрыш
105-сурет



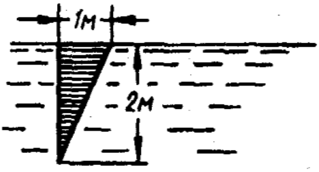
Парабола
106-сурет



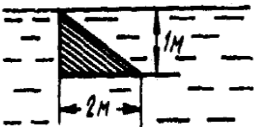
Параллелограмм
107-сурет



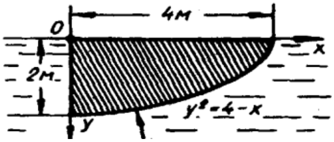
Жарты эллипс
108-сурет



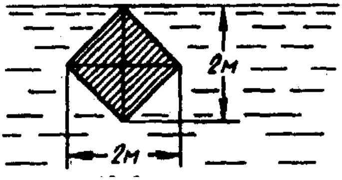
Тік бұрышты үшбұрыш
109-сурет



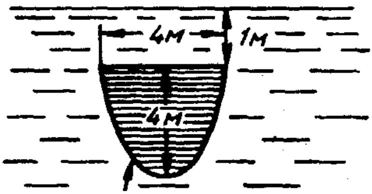
Тік бұрышты үшбұрыш
110-сурет



Парабола доғасы
111-сурет



Квадрат
112-сурет



Парабола
113-сурет

2.1. 84-сурет (**Жауабы:** 98 кН.)
2.2. 85-сурет (**Жауабы:** 85 кН.)
2.3. 86-сурет (**Жауабы:** 248 кН.)
2.4. 87-сурет (**Жауабы:** 105 кН.)
2.5. 88-сурет (**Жауабы:** 167 кН.)
2.6. 89-сурет (**Жауабы:** 26 кН.)
2.7. 90-сурет (**Жауабы:** 131 кН.)
2.8.91-сурет (**Жауабы:** 23 кН.)
2.9. 92-сурет (**Жауабы:** 523 кН.)
2.10. 93-сурет (**Жауабы:** 33 кН.)
2.11. 94-сурет (**Жауабы:** 31 кН.)
2.12. 95-сурет (**Жауабы:** 62 кН.)
2.13. 96-сурет (**Жауабы:** 24 кН.)
2.14. 97-сурет (**Жауабы:** 22 кН.)
2.15. 98-сурет (**Жауабы:** 239 кН.)
2.16. 99-сурет (**Жауабы:** 123 кН.)
2.17. 100-сурет (**Жауабы:** 78 кН.)

2.18. 101-сурет (**Жауабы:** 13 кН.)
2.19. 102-сурет (**Жауабы:** 52 кН.)
2.20. 103-сурет (**Жауабы:** 3 кН.)
2.21. 104-сурет (**Жауабы:** 23 кН.)
2.22. 105-сурет (**Жауабы:** 16 кН.)
2.23. 106-сурет (**Жауабы:** 251 кН.)
2.24. 107-сурет (**Жауабы:** 31 кН.)
2.25. 108-сурет (**Жауабы:** 13 кН.)
2.26. 109-сурет (**Жауабы:** 6 кН.)
2.27. 110-сурет (**Жауабы:** 6 кН.)
2.28. 111-сурет (**Жауабы:** 39 кН.)
2.29. 112-сурет (**Жауабы:** 20 кН.)
2.30. 113-сурет (**Жауабы:** 272 кН.)

3. ***Келесі есептерде жазықтықтағы L біртекті қисықтың масса центрінің координаттарын табу керек.***

3.1. L: Ox өсінен жоғары орналасқан $x^2+y^2=R^2$ – жарты шеңбер. (**Жауабы:** $x_c=0,\ y_c=\dfrac{2R}{\pi}$).

3.2. L: $x=a\left(t-\sin t\right)$, $y=a\left(1-\cos t\right)$, $0\le t\le 2\pi$ циклоиданың бірінші аркасы. (**Жауабы:** $x_c=\pi a,\ y_c=\dfrac{4}{3}a$).

3.3. L: үшінші квадранттағы $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроиданың доғасы. (**Жауабы:** $x_c=y_c=-0,4a$).

3.4. L: радиусы R тең шеңбердің α центрлік бұрышын керетін доға. (**Жауабы:** масса центрі центрлік бұрыштың биссектрисасында, центрден $2R\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ қашықтықта).

3.5. L: $y=ach\left(x-a\right)$, $-a\le x\le a$, шынжыр сызығының доғасы. (**Жауабы:** $x_c=0,\ y_c=\dfrac{a}{4}\cdot\dfrac{2+sh2}{sh1}$.)

3.6. L: $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi$, кардиоида доғасы.

(**Жауабы:** $x_c = y_c = \dfrac{4}{5a}$.)

3.7. L: $\rho = ae^{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$, логарифмдік спираль доғасы.

(**Жауабы:** $x_c = -\dfrac{a}{5}\cdot\dfrac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{5e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$, $y_c = \dfrac{a}{5}\cdot\dfrac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$.)

3.8. L: $x = 3(t-\sin t)$, $y = 3(1-\cos t)$ циклоидасының бір аркасы. (**Жауабы:** $x_c = 3\pi,\ y_c = 4.$)

3.9. L: $x = 2\cos^3\dfrac{t}{4}$, $y = 2\sin^3\dfrac{t}{4}$ астроидасының бірінші квадранттары доғасы. (**Жауабы:** $x_c = y_c = \dfrac{4}{5}$.)

3.10. L: $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ қисық доғасы.

(**Жауабы:** $x = \dfrac{2e^{\pi}+1}{5\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}$, $y_c = \dfrac{e^{\pi}-2}{5\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}$.)

3.11. L: $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ кардиоидасы. **Жауабы:** $x_c = 1{,}6;\ y_c = 0.$)

3.12. L: ρ=2sinφ қисығының (0,0) нүктеден $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ нүктеге дейінгі **доғасы.** (**Жауабы:** $x_c = \dfrac{2}{\pi};\ y_c = \dfrac{\pi-2}{\pi}.$)

3.13. L: $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$ шеңберлі ұңғы доғасы. (**Жауабы:** $x_c = \dfrac{2(\pi^2+4)}{a\pi^2}$, $y_c = \dfrac{6a}{\pi}$.)

3.14. L: $\rho=2\sqrt{3}\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$, қисық доғасы.

(**Жауабы:** $x_c=\frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{\pi},\ y_c=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$.)

3.15. L: $x=\sqrt{3}t^2,\ y=t-t^3,\ 0\le t\le 1$ қисығы.

(**Жауабы:** $x_c=\frac{7\sqrt{3}}{15},\ y_c=\frac{1}{4}$.)

Келесі есептерде берілген қисықтармен шенелген жазық біртекті Φ фигурасының масса центрінің табу керек.

3.16. Φ – қабырғалары $x+y=a$, $x=0$, $y=0$ түзулерінде жатқан үшбұрыш. (**Жауабы:** $x_c=y_c=\frac{a}{3}$.)

3.17. Φ фигурасы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллипсімен және координат өстерімен $(x\ge 0,\ y\ge 0)$ шенелген. (**Жауабы:** $x_c=\frac{4a}{3\pi},\ y_c=\frac{4b}{3\pi}$.)

3.18. Φ – $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ циклоидасының бірінші аркасымен және Ox өсімен шенелген.

(**Жауабы:** $x_c=\pi a,\ y_c=\frac{5a}{6}$.)

3.19. Φ – $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$ – қисықтарымен шенелген.

(**Жауабы:** $x_c=y_c=\frac{9}{20}$.)

3.20. Φ – $y=\sin x$ синусоидасы мен Ox өсінің кесіндісімен шенелген. (**Жауабы:** $x_c=\frac{\pi}{2},\ y_c=\frac{\pi}{8}$.)

3.21. Φ – $y=\sqrt{R^2-x^2}$ жарты шеңберімен және Ox өсімен шенелген. (**Жауабы:** $x_c=0,\ y_c=\frac{4R}{3\pi}$.)

3.22. Ф – $y = b\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $(a > 0,\, b > 0)$ парабола доғасымен, *Ox* өсімен және $x = b$ түзуімен шенелген.(**Ж:** $x_c = \dfrac{3b}{5}$, $y_c = \dfrac{3\sqrt{b^3}}{8\sqrt{a}}$.)

3.23. Ф – $y = b\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $a > 0$, $b > 0$ – парабола доғасымен, *Oy* өсімен және $y = b$ түзуімен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = \dfrac{3a}{10}$, $y_c = \dfrac{3b}{4}$.)

3.24. Ф – тұйық $y^2 = ax^3 - x^4$ сызығымен шенелген.

(**Жауабы:** $x_c = \dfrac{5a}{8}$, $y_c = 0$.)

3.25. Ф – координат өстерімен және астроиданың бірінші квадранттағы доғасымен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = y_c = \dfrac{256a}{315\pi}$.)

3.26. Ф – радиусы *R* центрлік бұрышы $2a$ тең дөңгелек секторы.

(**Жауабы:** масса центрі симметрия өсінде дөңгелек центрінен $\dfrac{2}{3}R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ қашықтықта жатыр.)

3.27. Ф – $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ – кардиоидасымен шенелген.

(**Жауабы:** $x_c = \dfrac{3a}{10}$, $y_c = \dfrac{3b}{4}$.)

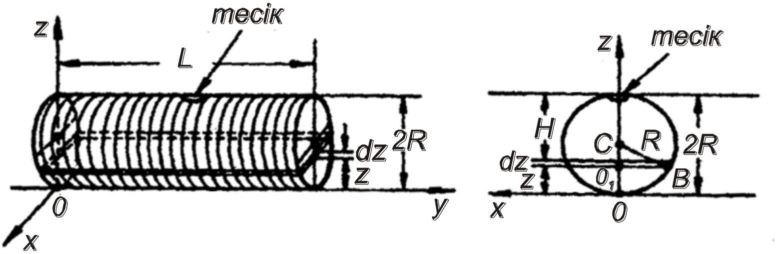
3.28. Ф – $\rho^3 = a^2\cos 2\varphi$ – Бернулли лемнискатасының бірінші тұзағымен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = \dfrac{\sqrt{2}\pi a}{8}$, $y_c = 0$.)

3.29. Ф – координат өстерімен және $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ параболасымен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = y_c = \dfrac{a}{5}$.)

3.30. Ф – $ay^2 = x^3$ – жартылай кубтың параболамен және $x = a$, $a > 0$ түзуімен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = \frac{5a}{7}$, $y_c = 0.$)

8.3–ҮТ шығару үлгісі

1. Бүйірінде жатқан дөңгелек цилиндр тәріздес резервуардың ұзындығы $L = 5$ м және табан радиусы $R = 1$ м (114-сурет). Оның жоғарыда орналасқан тесігі арқылы ішіндегі суды сорып шығаруға жұмсалатын A жұмысты анықтау керек. Судың меншікті салмағы $\gamma = 9{,}81\ \frac{кН}{м^3}$. (Нәтижені бүтін бөлікке дейін дөңгелектеу керек).



114-сурет

► Биіктігі z тең жерде қабаты dz тең суды аламыз. Оның

Көлемі $dV = 2|O_1B|Ldz = 2L\sqrt{R^2 - (R-z)^2}dz = 2L\sqrt{z(2R-z)}dz.$

Осы қабат суды $H = 2R - z$ биіктігіне көтеру керек. $dz-$қабат суды шығаруға жұмсалатын элементар жұмыс келесі формуламен анықталады:

$$dA = H\gamma dV = 2\gamma L(2R-z)\sqrt{z(2R-z)}dz.$$

Барлық суды шығаруға жұмсалатын жұмыс барлық элементар жұмыстардың қосындысына тең:

$$A = \int_0^{2R} dA = \int_0^{2R} 2\gamma L(2R-z)\sqrt{z(2R-z)}dz = 2\gamma L\int_0^{2R} z^{\frac{1}{2}}(2R-z)^{\frac{3}{2}}dz. \qquad (1)$$

Алынған интегралды есептеу үшін $2R-z=u^2z$ айнымал ауыстыруын жасаймыз: $A=2\gamma L\int\limits_0^{2R} z^{\frac{1}{2}}\left(2R-z\right)^{\frac{3}{2}}dz=$

$$=\left|\begin{array}{c} 2R-z=u^2z, \\ dz=-4Ru\left(u^2+1\right)^{-2}du, \\ z=\dfrac{2R}{u^2+1}, \\ \textit{егер } z=0, \text{онда } u=\infty, \\ \textit{егер } z=2R, \text{ онда } u=0 \end{array}\right|= 32\gamma LR^3\int\limits_0^{\infty}\frac{u^4du}{\left(u^2+1\right)^4}.$$

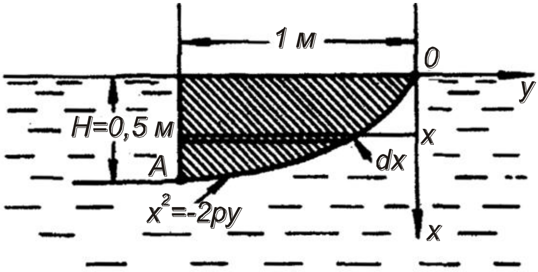
Интеграл астындағы дұрыс рационал бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейміз. Содан соң алынған әрбір интеграл 7.2.2 п. (6) түрінде болғандықтан, сол пункттегі (7)-рекурентті формуланы пайдаланамыз:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{u^4du}{\left(u^2+1\right)^4}=\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}-\frac{2}{\left(u^2+1\right)^3}+\frac{1}{\left(u^2+1\right)^4}\right)du=$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\cdot\frac{3}{4}\frac{\pi}{4}+\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{32}.$$

Сонымен $A=\dfrac{32\gamma LR^3\pi}{32}=\pi\gamma LR^3$. Егер $L=5$ м, $R=1$ м, онда $A=3{,}14\cdot 9{,}81\cdot 5\cdot 1\approx 154$ кДж. ◄

2. Суға вертикаль батырылған пластинаға түсетін судың қысымын есептеу керек. Судың меншікті салмағы $9{,}81\,\dfrac{кН}{м^3}$. Пластинаның формасы, өлшемдері және орналасуы 115-суретте көрсетілген.



115-сурет

► Пластинамен салыстырғандағы координаттар жүйесін 9.57-суретте көрсетілгендей етіп таңдаймыз. Онда парабола теңдеуі $x^2 = -2py$ болады. Парабола $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ нүктесінен өтетіндіктен $p = \frac{1}{8}$ және $x^2 = -\frac{y}{4}$.

x – тереңдікте ені dx және ауданы $ds = (1 - |y|)dx$ болатын горизонталь жолақты бөліп аламыз. Судың бұл жолаққа қысымы

$$\Delta P = \gamma x(1 - |y|)dx = \gamma x\left(1 - 4x^2\right)dx .$$

Онда судың барлық пластинаға қысымы

$$P = \gamma \int_0^H x\left(1 - 4x^2\right)dx = \gamma\left(\frac{x^2}{2} - x^4\right)\Bigg|_0^H = \gamma\left(\frac{H^2}{2} - H^4\right).$$

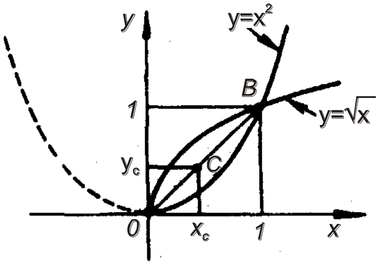
$H = \frac{1}{2}$ м және $\gamma = 9{,}81\,\frac{кН}{м^3}$ үшін:

$$P = 9{,}81\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) = \frac{9{,}81}{16} \approx 0{,}61 \text{ кН.} \qquad ◄$$

3. $y = x^2$ және $y = \sqrt{x}$ қисықтарымен шенелген біртекті фигураның масса центрінің координаттарын табу керек.

► 116-суретте көрсетілген фигураның масса центрінің координаттарын табуға келесі формулаларды пайдаланамыз:

$$x_C = \frac{\int_a^b x\delta(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}{\int_a^b \delta(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}, \quad y_C = \frac{\frac{1}{2}\delta(x)\left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx}{\int_a^b \delta(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}.$$



116-сурет

Мұнда $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, ал қисықтардың қиылысу нүктелері $O(0,0)$ және $B(1,1)$ болғандықтан, $a = 0$, $b = 1$. Есептейміз:

$$\int_0^1 (y_2 - y_1)dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x(y_2 - y_1)dx = \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (y_2 + y_1)(y_2 - y_1)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - x^4\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20},$$

ал бұдан $x_C = y_C = \frac{9}{20}$ аламыз. ◄

Бақылау жұмысына арналған есептер

№1 бақылау жұмысы.

1. Функцияның шегін табу керек.

2. $y = f(x)$ функциясы және x аргументтің екі мәні берілген.

1) Функцияны x-тің осы мәндерінде үзіліссіздікке зерттеу керек;

2) Функцияның x_1 мен x_2 нүктелерінің маңайындағы схемалық сызбасын салу керек.

3. Құрақталып берілген $y = f(x)$ функциясының үзіліс нүктелерін табу керек және схемалық сызбасын салу керек.

1

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^5 - 4x^4 + 2}{3x^5 - 2x - 1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10}$; $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5x+4} - 3}{\sqrt{2x-1} - 1}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg 3x}{4x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{\sin 2x}{x(\pi + x)}$;

е) $\lim\limits_{x\to -2} (5 + 2x)^{\frac{3}{x+2}}$; $\lim\limits_{x\to 0} (5 + 2x)^{\frac{3}{x+2}}$.

2. $y = e^{\frac{1}{x-7}}$, $x_1 = 7$, $x_2 = 0$.

3. $y = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \le x < 1, \\ 2x, & x \ge 1. \end{cases}$

2

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}2x\cdot ctg5x$; **д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2}$.

2. $y=\ln(x-8),\ x_1=7,\ x_2=8.$

3. $y=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1-x, & 0\le x\le 2,\\ x^2, & x>2.\end{cases}$

3

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}$; $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$.

2. $y=e^{\frac{1}{x-2}}$, $x_1=2,\ x_2=1$.

3. $y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0<x<2,\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$

4

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{2x^3+10x^2+5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$; $\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2-\sqrt[3]{x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x}{3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to3}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to4}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$.

2. $y=\dfrac{x-4}{x^2+x-20}$, $x_1=4,\ x_2=-5$.

3. $y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x^2, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

5

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2}{5x^4+8x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$; $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$.

2. $y=5^{\frac{1}{11-x}}$, $x_1=11$, $x_2=3$.

3. $y=\begin{cases} x+2, & x\le -1, \\ x^2+1, & -1<x\le 1, \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

6

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2+1}{3x^5-2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 8x}{2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tgx}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-6x+7}{3x^2+20x-1}\right)^{1-x}$ **;** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x^2-6x+7}{3x^2+20x-1}\right)^{1-x}$ **.**

2. $y = arctg\left(\dfrac{1}{x+9}\right)$**,** $x_1 = -9,\ x_2 = -8$**.**

3. $$y=\begin{cases} -x^2, & x\le 0,\\ tgx, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 2, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

7

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+4x}$**;**

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$**;** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$**;**

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$**; г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{xtg2x}$**; д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)tg2x$**;**

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13x+2}{13x-15}\right)^{x+7}$ **;** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{13x+2}{13x-15}\right)^{x+7}$ **.**

2. $y=\ln(x-7)$**,** $x_1 = 7,\ x_2 = 5$**.**

3. $$y=\begin{cases} x+1, & x\le 0,\\ (x+1)^2, & 0<x\le 2,\\ -x+4, & x>2. \end{cases}$$

8

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x-2}{5x^3+3x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{5}}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^2-16x+3}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^2-16x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; **г)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin3\pi x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+8x-2}{5x^2+3x+3}\right)^{4x+1}$; $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{5x^2+8x-2}{5x^2+3x+3}\right)^{4x+1}$.

2. $y=x+\dfrac{x+3}{x^2+3x}$, $x_1=-3$, $x_2=0$.

3. $y=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<1,\\ 3-x, & x\ge1.\end{cases}$

9

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to0,5}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{4x-2}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)^{\frac{4x-2}{x+1}}$.

2. $y = arctg\dfrac{1}{3-x}$, $x_1 = 3,\ x_2 = 2$.

3. $y = \begin{cases} -\sin x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 1, \\ 2x, & x \ge 1. \end{cases}$

10

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{\arcsin 4x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{5x+4}\right)^{x/2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{5x+4}\right)^{x/2}$.

2. $y = e^{\frac{1}{x+5}}$, $x_1 = -5,\ x_2 = 1$.

3. $y = \begin{cases} x+1, & x < -2, \\ -x^2+2, & -2 \le x < 1, \\ 2+x, & x \ge 1. \end{cases}$

11

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-4)(x+1)}{x^3+x^2+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$; $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{4x+5}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(2-x)^{\frac{4x+5}{x-1}}$.

2. $y=\dfrac{x+2}{x^2-25}$, $x_1=5$, $x_2=-5$.

3. $y=\begin{cases} x-1, & x<-1, \\ -2, & -1\le x<0, \\ \cos x, & x\ge 0. \end{cases}$

12

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-2x-39}{-x^2-2x+15}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-2x-39}{-x^2-2x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}3x\,ctg\,9x$; **д)** $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)ctg\dfrac{\pi x}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+5}\right)^{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{6x-7}{6x+5}\right)^{3x-6}$.

2. $y=\ln(x+7),\ x_1=-7,\ x_2=-10$.

3. $y=\begin{cases} 2x, & x\le 1, \\ (x-1)^2, & 1<x<3, \\ 2-2x, & x\ge 3. \end{cases}$

13

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+3x}{2x^2-3x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-12}{3x-9}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{3x-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-tgx}{\sin^3 x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$; $\lim\limits_{x\to 1} x(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$.

2. $y=\dfrac{2-2x}{x^3-x^4},\ x_1=1,\ x_2=0$.

3. $y=\begin{cases} -x, & x\le -\dfrac{\pi}{4}, \\ tgx, & -\dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{4}, \\ x, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

14

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^2-(x+3)^2}{(x+2)^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{tg^2 8x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin^2 5x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$.

2. $y=x+\dfrac{x+2}{x^2-4}$, $x_1=-2,\ x_2=1$.

3. $y=\begin{cases} x-4, & x<-1, \\ x^2, & -1\le x<1, \\ x+4, & x\ge 1. \end{cases}$

15

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x}{2x^2+6x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{3x-3}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{3x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-5}-1}{36-x^2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}(7x-6)^{\frac{x+5}{2x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 2}(7x-6)^{\frac{x+5}{2x-2}}$.

2. $y = e^{\frac{1}{x+1}}$, $x_1 = -1,\ x_2 = 0$.

3. $y = \begin{cases} \sin x, & x < -\pi, \\ \cos x, & -\pi \le x < \pi, \\ 1, & x \ge \pi. \end{cases}$

16

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2+2} - x^2\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x-7}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 5x)\cdot ctg^2 3x$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

2. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$, $x_1 = 2,\ x_2 = 1$.

3. $y = \begin{cases} -x-1, & x < 0, \\ (x+5)^2, & 0 \le x < 3, \\ 1-x, & x \ge 3. \end{cases}$

17

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$; $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,tg\,2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x-2}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x-2}\right)^x$.

2. $y=\dfrac{x+1}{x}$, $x_1=2$, $x_2=0$.

3. $y=\begin{cases}4, & x<-\pi,\\ \cos x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & x\ge 0.\end{cases}$

18

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x+1}{2x^2+x-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 4x}{1-\cos 3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{6x+2}{3x-6}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(5-2x)^{\frac{6x+2}{3x-6}}$.

2. $y=\dfrac{x-3}{x^2-4}$, $x_1=2,\ x_2=-2$.

3. $y=\begin{cases}-x+3, & x<-2,\\ x^2-1, & -2\le x<1,\\ 2-4x, & x\ge 1.\end{cases}$

19

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^2-2x}{x^2+4x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}}{2x-\pi}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{4x}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 1}(3-x)^{\frac{4x}{x-2}}$.

2. $y=arctg\,\dfrac{1}{x-2}$, $x_1=2,\ x_2=3$.

3. $y=\begin{cases}-1, & x\le-\dfrac{\pi}{4},\\ tgx, & -\dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ x^2, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

20

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{2x^4+x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{x^2-25}$; $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+3x-10}{x^2-25}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+x^2-3}}{x^2-4}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-3x-2}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-3x-2}\right)^x$.

2. $y=\dfrac{4x}{x+3}$, $x_1=3$, $x_2=0$.

3. $y=\begin{cases} -4x, & x<-1, \\ -(x-1)^2, & -1\le x<1, \\ 4x, & x\ge 1. \end{cases}$

21

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(5x-4)(2x+2)}{5x^3+2x^2+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{2-x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) tg \dfrac{\pi x}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x+2}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x+2}\right)^x$.

2. $y=\dfrac{x+1}{x^2+x^3}$, $x_1=-1,\ x_2=0$.

3. $y=\begin{cases}1+x, & x<-1,\\ x^2, & -1\le x<0,\\ \sin x, & x\ge 0.\end{cases}$

22

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{1-x}-1}$; **г)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$;

е) $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; $\lim\limits_{x\to3}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

2. $y=\dfrac{x}{x-x^3}$, $x_1=1,\ x_2=0$.

3. $y=\begin{cases}2x+4, & x<1,\\ 3x^2, & 1\le x<3,\\ x-2, & x\ge 3.\end{cases}$

23

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-4x^3-2}{5x^3+3x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2-7x+3}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\dfrac{5x}{2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{arctg(x+2)}{x^2-4}$;

е) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{8}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 4}(3x-8)^{\frac{8}{x-3}}$.

2. $y=\dfrac{x-1}{2x^2-x-1}$, $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1}{2}$.

3. $y=\begin{cases} x+3, & x<-\pi, \\ \sin x, & -\pi\le x<0, \\ 0, & x\ge 0. \end{cases}$

24

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^2+1}{3x^5-9x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+10x+12}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+10x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\sec x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-1}\right)^{-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-1}\right)^{-x^2}$.

2. $y = arctg\,\dfrac{1}{x}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

3. $y = \begin{cases} x-3, & x<0, \\ x^2-1, & 0 \le x < 1, \\ x+6, & x \ge 1. \end{cases}$

25

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^5-4x^2+1}{3x^5-x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2+x-56}{x^2-49}$; $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x^2+x-56}{x^2-49}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{2-\sqrt[3]{8-x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0,5} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

2. $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

3. $y = \begin{cases} \cos x, & x<0, \\ x-1, & 0 \le x < 2, \\ 2, & x \ge 2. \end{cases}$

26

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-3x^5+1}{4x^5-2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{7+x}}{x-2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{tgx^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0} ctgx^2(1-\cos x)$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 3}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

2. $y=\ln(1+2x)$, $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=-2$.

3. $y=\begin{cases}4-x, & x\le 0,\\ (x+3)^2, & 0<x<2,\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$

27

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{2x^4+x^3-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-4x^2+3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x^2+3}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x-2}-2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-1}{\sin^2 3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$ **;** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$ **.**

2. $y = x + \dfrac{x-5}{x^2-25}$, $x_1 = 5,\ x_2 = 0$.

3. $y = \begin{cases} 2-x, & x \le -\dfrac{\pi}{4}, \\ tgx, & -\dfrac{\pi}{4} < x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

28

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x^3+1}$**;**

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$**;** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$**;**

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{x^2+2x}$**;** **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$**;** **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$**;**

е) $\lim\limits_{x\to -2}(4x+9)^{\frac{5-x}{2+x}}$ **;** $\lim\limits_{x\to 0}(4x+9)^{\frac{5-x}{2+x}}$ **.**

2. $y = arctg\dfrac{1}{x-6}$, $x_1 = 7,\ x_2 = 6$.

3. $y = \begin{cases} x-1, & x < -1, \\ x^2+3, & -1 \le x < 1, \\ -2x, & x \ge 1. \end{cases}$

29

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-4x^2-2}{3x^3+x^2+4x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$; $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg\left(2\pi\left(x+1/2\right)\right)}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

2. $y=3^{\frac{1}{1-x}}$, $x_1=1$, $x_2=0$.

3. $$y=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\pi,\\ 2, & x\ge\pi.\end{cases}$$

30

1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{x^3-4x^4+4x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+4x-21}{x+7}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x-21}{x+7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ **;** **г);** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}$ **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{tg^2 3x}$ **;**

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3+1}{3x^3+x^2-3}\right)^{2x+1}$ **;** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x^3+1}{3x^3+x^2-3}\right)^{2x+1}$ **.**

2. $y=\dfrac{3}{x^2-2x}$**,** $x_1=2,\ x_2=0$**.**

3. $y=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ -x^2+1, & 0\le x\le 1,\\ x+5, & x>1.\end{cases}$

Дифференциалдық есептеулер

№ 2 бақылау жұмысы

1. Функциялардың туындысын табу керек.

2. Функцияның локальді экстремумдерін және монотонды аралықтарын табу керек.

3. Функцияның иілу нүктелерін және ойыс-дөңес аралықтарын табу керек.

4. Функция сызбасының асимптоталарын табу керек.

1.

1.

а) $y=x^2\sin x+\dfrac{ctgx}{5(x-1)}$; б) $y=\ln(x^2+x)+arctg(2\sqrt{x})$ в) $(tgx)^x$.

2. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 4.$ **3.** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}.$ **4.** $y = \sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}}.$

2

1.

а) $y = x^4 \cdot 2^x + \dfrac{\arcsin x}{3x};$ б) $y = \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2};$ в) $(\cos x)^{tgx}.$

2. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}.$ **3.** $y = \dfrac{x}{x^3 + 2}.$ **4.** $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}.$

3

1.

а) $y = 4x^3 \log_2 x + \dfrac{x}{e^x};$ б) $y = (2x+1)\ln^2 x;$ в) $y = (\dfrac{1}{x})^{\ln x}.$

2. $y = x - 2\ln x.$ **3.** $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}.$ **4.** $y = \dfrac{\sqrt{|x^2 - 3|}}{x}.$

4

1.

а) $y = \dfrac{2}{3x-1} - \sqrt{x}\,\mathrm{t}gx;$ б) $y = (\sin^2 x + 4)^2;$ в) $y = (\ln x)^{\cos x}.$

2. $y = \ln x - 2\arcsin x.$ **3.** $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}.$

4. $y = 3x + \mathrm{a}rctg5x.$

5

1.

а) $y=\dfrac{x^2}{1+\cos x}+x\arcsin x;$ **б)** $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}x;$ **в)** $y=(\mathrm{ctg}x)^{x^2}.$

2. $y=x\cdot e^{-\frac{x}{2}}.$ **3.** $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}.$ **4.** $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}+2x.$

6

1.

а) $y=\dfrac{x}{2}\arccos x-\dfrac{5x^2}{3+2x^3};$ **б)** $y=\sqrt[5]{(2+4x^2)^3};$ **в)** $y=(1+\dfrac{1}{x})^x.$

2. $y=\dfrac{x}{1+x^3}.$ **3.** $y=\dfrac{(x^2-5)^3}{125}.$ **4.** $y=\dfrac{\sin x}{x}.$

7

1.

а) $y=\sqrt{x}\cdot 3^x+\dfrac{\mathrm{arcctg}x}{3x-2};$ **б)** $y=e^{5x}\cdot\cos^4\dfrac{x}{4};$ **в)** $y=(\ln x)^{\sin x}.$

2. $y=1-\sqrt[3]{(x-4)^2}.$ **3.** $y=2^{\frac{1}{x}}.$ **4.** $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x}).$

8

1.

а) $y=4\sqrt[4]{x^3}\cdot\arccos x+\dfrac{e^x}{e^x-1};$ **б)** $y=3^{\sqrt{\cos 2x}};$ **в)** $y=(\mathrm{ctg}x)^{4x}.$

2. $y = x\sqrt{1-x}$. **3.** $y = e^{-2x^2}$. **4.** $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

9

1.

а) $y = x^5 \cdot arctgx - \dfrac{x-1}{x^2+1}$; **б)** $y = \cos^4(\sin\dfrac{x}{3})$; **в)** $y = x^{\arccos x}$.

2. $y = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$. **3.** $y = xe^{1-x}$. **4.** $y = \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

10

1.

а) $y = 2x^3 \sin x - \dfrac{3x^2}{x-1}$; **б)** $y = \sqrt{arcctg\,\dfrac{x}{2}}$; **в)** $y = x^{2tgx}$.

2. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. **3.** $y = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{2}{x^2}$. **4.** $y = xarctgx$.

11

1.

а) $y = x^4 \arccos x + \dfrac{\ln x}{ctgx}$; б) $y = (3x + \cos 2x)^3 \cdot arctg4x$; в) $y = x^{\sqrt{x}}$.

2. $y = e^{2x-x^2}$. **3.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$. **4.** $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

12

1.

а) $y = 2^x \log_2 x + \dfrac{x^3}{2+e^x}$; б) $y = \sqrt{1-e^{-x^2}}$; в) $y = (\cos x)^{arctgx}$.

2. $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$. **3.** $y = \dfrac{x^3}{x^4-1}$. **4.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

13

1.

а) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \sin x + \dfrac{3^x}{\arccos x}$; б) $y = arctg\sqrt{x^2-1}$; в) $y = (\dfrac{1}{x})^{ctgx}$.

2. $y = x - 2\sqrt{x}$. **3.** $y = x^7 + 7x + 1$. **4.** $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

14

1.

а) $y = \ln x \cdot \sin x + \dfrac{x - arctgx}{x^3}$; б) $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$; в) $y = (\mathrm{tg}x)^{\frac{1}{x}}$.

2. $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$. **3.** $y = x^4 - 6x^2$. **4.** $y = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$.

15

1.

а) $y = x^4 arctgx + \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; б) $y = 2^{\frac{3x}{\ln x}}$; в) $y = (\sqrt{1+x^2})^{\mathrm{tg}x}$.

2. $y = \mathrm{a}rctg\,\dfrac{1-x}{1+x}$. **3.** $y = xe^{2x} + 1$. **4.** $y = 5x + \dfrac{\ln x}{x}$.

16

1.

а) $y = \sqrt[3]{x^4}\,\mathrm{t}gx + \dfrac{\arccos x}{e^x}$; **б)** $y = 4^{\sqrt{\cos 3x}}$; **в)** $y = (\sin x)^{\mathrm{a}rctgx}$.

2. $y = x\sqrt{1-x^2}$. **3.** $y = \sqrt[3]{(x-4)^5} + 2$. **4.** $y = \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2-1}}$.

17

1.

а) $y = x^4 e^x - \dfrac{\mathrm{t}gx}{\arcsin x}$; **б)** $y = \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$; **в)** $y = (\dfrac{1}{x})^{x^2}$.

2. $y = \dfrac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$. **3.** $y = \sqrt[3]{x^2-2x}$. **4.** $y = \dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2+1}$.

18

1.

а) $y = x^2\sqrt[3]{x}\ln x + \dfrac{3\sin x}{1-\cos x}$; **б)** $y = x\arcsin\ln x$; **в)** $y = (\sqrt[4]{x})^{\sqrt{x}}$.

2. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **3.** $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. **4.** $y = 3x - \dfrac{\sin x}{x}$.

19

1.

а) $y = \sin x \cdot \ln x - \dfrac{arctgx}{2^x}$; **б)** $y = \dfrac{1}{(2\mathrm{tg}^3 4x - 3)^4}$; **в)** $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.

2. $y = \dfrac{x}{2 - x^3}$. **3.** $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. **4.** $y = \dfrac{x}{2} + arcctgx$.

20

1.

а) $y = x^3 arcctgx - \dfrac{2\sqrt[3]{x}}{e^x + 1}$; **б)** $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$; **в)** $y = (\mathrm{tg}x)^{2x}$.

2. $y = \dfrac{1}{6} x^3 (x^2 - 5)$. **3.** $y = xe^{4x} + 2$. **4.** $y = 2x + arctg7x$.

21

1.

а) $y = x \ln x - \dfrac{x^2}{2x - 1}$; **б)** $y = 2^{\sqrt{3 + x^2 \sin x}}$; **в)** $y = (\arcsin x)^x$.

2. $y = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$. **3.** $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. **4.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

22

1.

а) $y = x^3 \arccos x + \dfrac{5e^x}{x - 1}$; **б)** $y = \sqrt{arctg\sqrt{x}}$; **в)** $y = (\ln x)^{ctgx}$.

2. $y=\sqrt{e^{x^2}-1}.$ **3.** $y=2^{\frac{1}{x}}.$ **4.** $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}.$

23

1.

а) $y=4\sqrt[4]{x^3}\sin x+\dfrac{2x^2}{\ln x+3}$; **б)** $y=\sqrt{4x-1}-arctg\sqrt{4x-1}$;

в) $y=(\arccos x)^{\frac{1}{x}}.$

2. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}.$ **3.** $y=\dfrac{\ln x}{x}.$ **4.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}.$

24

1.

а) $y=x^2\sin x+\dfrac{\mathrm{t}gx}{\sqrt{x}}$; **б)** $y=\ln(e^{-x}+xe^{-x})$; **в)** $y=x^{\mathrm{arctg}x}.$

2. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}.$ **3.** $y=(x-1)^{\frac{5}{3}}.$ **4.** $y=\dfrac{x^3-2x}{x^2-2}.$

25

1.

а) $y=x\cos x+\dfrac{\mathrm{t}gx}{2+3\mathrm{c}tgx}$; **б)** $y=\sqrt{\arcsin^2 3x-1}$; **в)** $y=(\ln x)^{\mathrm{arctg}x}.$

2. $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}.$ **3.** $y=(x+2)^5+3x-1.$ **4.** $y=\dfrac{4x^4+3x^3+1}{x^3}.$

26

1.

а) $y=\sqrt[3]{x}e^{x}+\frac{arcctgx}{1+x^{2}}$; **б)** $y=\sin^{2}\frac{x}{3}ctg\frac{x}{2}$; **в)** $y=(\sqrt{x})^{\arccos x}$.

2. $y=(x^{2}-2x)\ln x-\frac{3}{2}x^{2}+4x.$ **3.** $y=x^{3}+2x^{2}.$

4. $y=\sqrt[3]{x^{3}+3x^{2}}.$

27

1.

а) $y=x^{2}\log_{5}x-\frac{x}{x^{2}+1}$; **б)** $y=\cos^{2}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; **в)** $y=(arctgx)^{x^{2}}$.

2. $y=\sqrt[3]{(x+1)^{2}}-\sqrt[3]{x^{2}}+1.$ **3.** $y=x+\frac{\ln x}{x}.$ **4.** $y=e^{\frac{1}{x^{2}-4x+3}}.$

28

1.

а) $y=(x^{2}-2x+3)e^{x}+\frac{\arcsin x}{\arccos x}$; **б)** $y=\ln\sqrt[4]{1+x^{2}}$; **в)** $y=x^{\mathrm{tg}x}$.

2. $y=e^{\frac{1}{x^{2}-4x+3}}.$ **3.** $y=\frac{2x-1}{(x-1)^{2}}.$ **4.** $y=\sqrt{\frac{x^{3}-2}{3x}}.$

29

1.

а) $y=-xarctgx+\frac{x-1}{\log_{2}x}$; **б)** $y=e^{\sqrt{\ln^{2}x+3x}}$; **в)** $y=(\sin x)^{\cos x}$.

2. $y = \dfrac{x}{e^x}$. **3.** $y = x - 2arctgx$. **4.** $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

30

1.

а) $y = x^2 \ln x + \dfrac{2x}{\sin x + \cos x}$; **б)** $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; **в)** $y = (\mathrm{t}gx)^{arctgx}$.

2. $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$. **3.** $y = \dfrac{(x^2-1)(x-2)}{x}$. **4.** $y = \dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$.

Интегралдық есептеулер

№3 бақылау жұмысы

Интегралдарды табу керек.

1

1. $\int (\dfrac{1-x}{x})^2 dx$; **2.** $\int (e^x+1)^3 dx$; **3.** $\int \arccos 2x dx$; **4.** $\int_1^8 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

2

1. $\int \dfrac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$; **2.** $\int \dfrac{dx}{(4x+1)^3}$; **3.** $\int x\cos 5x dx$; **4.** $\int_1^e \dfrac{\cos\ln x}{x} dx$.

3

1. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}) dx$; **2.** $\int \dfrac{e^x dx}{e^x+5}$; **3.** $\int x^3 \ln x dx$;

4. $\int_1^6 \dfrac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$.

4

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$; **2.** $\int \frac{2xdx}{x^4+1}$; **3.** $\int \frac{\ln xdx}{\sqrt{x}}$; **4.** $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

5

1. $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$; **2.** $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$;

3. $\int (x^2 - x + 1)\ln xdx$; **4.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin 4xdx$.

6

1. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$; **2.** $\int \frac{arctg^3 xdx}{1+x^2}$; **3.** $\int x^2 \sin 3xdx$; **4.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 xdx$.

7

1. $\int 2\cos^2 \frac{x}{2}dx$; **2.** $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$; **3.** $\int x^2 e^{-2x}dx$; **4.** $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

8

1. $\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)}$; **2.** $\int x\sqrt{4-x^2}dx$; **3.** $\int x^3 e^x dx$; **4.** $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

9

1. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$; **2.** $\int \sqrt{4-3x}dx$; **3.** $\int x^3 e^{-x^2}dx$; **4.** $\int_0^{\pi} \sin^3 xdx$.

10

1. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}dx$; **2.** $\int \frac{(2x-3)dx}{2\sqrt{x^2-3x+1}}$; **3.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; **4.** $\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}dx$.

11

1. $\int \frac{x-2}{x}dx$; **2.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; **3.** $\int x2^x dx$; **4.** $\int_1^2 x\log_2 xdx$.

12

1. $\int \frac{1+x^3}{x+1}dx$; **2.** $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2-5x+3}$; **3.** $\int \mathrm{a}rctg\sqrt{x}dx$; **4.** $\int_0^{\pi} x\sin xdx$.

13

1. $\int (\frac{1+2x}{x})^2 dx$; **2.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; **3.** $\int x\mathrm{a}rctgxdx$; **5.** $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

14

1. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; **2.** $\int e^{-x^3}x^2dx$; **3.** $\int \sin(\ln x)dx$; **4.** $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

15

1. $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$; **2.** $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$; **3.** $\int x\cos^2 xdx$; **4.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

16

1. $\int \frac{x^3+2}{x}dx$; **2.** $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **3.** $\int x\sin x\cos xdx$;

4. $\int_2^{10} \sqrt{x-2}dx$.

17

1. $\int 3^x(1+2x^3\cdot 3^{-x})dx$; **2.** $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^4 x}$; **3.** $\int x\ln(1+x)dx$; **4.** $\int_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}dx$.

18

1. $\int \frac{2-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$; **2.** $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx$; **3.** $\int x^4 \ln x dx$;

4. $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

19

1. $\int \frac{dx}{x^2+9}$; **2.** $\int \frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}dx$; **3.** $\int x^2 \sin x dx$; **4.** $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}dx$.

20

1. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 dx}{\sqrt{x}}$; **2.** $\int \frac{e^x}{(2-e^x)^3}dx$; **3.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; **4.** $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

21

1. $\int (\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2 dx$; **2.** $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$; **3.** $\int x\cos 3x dx$;

4. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

22

1. $\int \frac{x^2}{x^2-9}dx$; **2.** $\int x(5x-1)^{19}dx$; **3.** $\int x^2 \cdot e^{2x}dx$; **4.** $\int_0^1 x arctg x dx$.

23

1. $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}})dx$; **2.** $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$; **3.** $\int (1-x)\ln x dx$;

4. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

24

1. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; **2.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$; **3.** $\int e^{\sqrt{x}} dx$; **4.** $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

25

1. $\int \frac{x^2-1}{x+1} dx$; **2.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x \,\mathrm{tg}^4 x}$; **3.** $\int x^2 \sin 2x dx$; **4.** $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

26

1. $\int (3x+\sqrt{x}-\sin x)dx$; **2.** $\int \frac{(2+\ln x)^2}{x} dx$; **3.** $\int e^{2x} \cos x dx$;

4. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$.

27

1. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$; **2.** $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}}$; **3.** $\int (x^2+2x+1)\cdot e^x dx$;

4. $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2} dx$.

28

1. $\int \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$; **2.** $\int \frac{x^2 dx}{1+x^3}$; **3.** $\int x^2 \cdot \sin 2x dx$; **4.** $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$.

29

1. $\int e^{2x}(e^{-2x}+e^{-x})dx$; **2.** $\int \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **3.** $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$; **4.** $\int_1^e \ln^2 x dx$.

30

1. $\int (5\cos x + x^3 - \frac{1}{x})dx$; **2.** $\int \frac{x^3 dx}{1+x^8}$; **3.** $\int x\cos 2x dx$; **4.** $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.– М.: Наука, 1980.
2. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
3. Теміргалиев Н. Математикалық анализ, 1-2 бөлімдер. Алматы: Мектеп, 1987.
4. Қ.Ж.Наурызбаев, М.Е.Берікханова. Жоғары математика есептері. – Алматы: Қазақ университеті, 1-дәптер. 2000.
5. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс), «Иль-Тех-Кітап», 2003.
6. А.П.Рябушко и др. Индивидуальные задания по высшей математике, Ч.1, Ч.2., Минск «Вышэйшая школа», 2002
7. Айдос Е.Ж., Балықбаев Т.О. Математика пәні бойынша жоғары оқу орындарына түсушілерге арналған оқу құралы, ЖШС РПБК «Дәуір», 459 б., Алматы 2006.
8. Қазақша-орысша, орысша-қазақша терминологиялық сөздік: Математика, – «Рауан» баспасы, Алматы 1999.

МАЗМҰНЫ

Ерқара Жолдыбайұлы
Айдос

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА-II

ISBN 978-601-281-136-0 (к.2)
ISBN 978-601-281-138-4

Басуға 2015 жылы қол қойылды.
Форматы 60х84 1/16. Көлемі 32,5 баспа табақ.
Times гарнитурасы. Офсеттік басылым.
Тапсырыс № 294. Тиражы – 1000 дана.

«Бастау» баспасы (тел. 279-49-53, 279-97-32).
Мемлекеттік лицензия – № 0000036
ҚР Білім және ғылым министрлігі.
ҚР Ұлттық мемлекеттік кітап палатасының
халықаралық код беру туралы №155 – 978-601-281 сертификаты.
Алматы қаласы, Сейфуллин даңғылы, 458/460-95.

«Полиграфсервис» ЖШС-і баспаханасында басылды (тел. 233-32-53).
Алматы қаласы, 050050, Зеленая көшесі, 13-а.

ISBN 978-601-281-138-4

9 786012 811384

Қосымша жазулар жазу үшін